فصل ششم
انتگرال معین

مقدمه: در این فصل به بحث و بررسی مطلبی می‌پردازیم که یکی از ارکان درس حساب دیفرانسیل و انتگرال است. در فصل‌های قبلی آنقدرمطلب آموخته‌ایم که اکنون بتوانیم با اطمینان خاطر و بر پایهٔ اصولی منطقی به تعریف انتگرال معین و بسط و گسترش آن بپردازیم. بیان کاربردهای مختلف و متنوع انتگرال در کلیه رشته‌های علوم ، مهندسی، کامپیوتر و ... از ظرفیت و توان کتاب حاضر خارج است و می بایست به تدریج و در جای خود هر کدام از آن ها را فراگرفت. به عنوان مثال مطالعهٔ دو صفحه اول و دوم این فصل تنها به عنوان یک نمونه از کاربردها می‌تواند سودمند باشد. کار اساسی ما در اینجا بیان و مطالعه انتگرال معین از نقطه نظر ریاضی است.

۶ . ۱ مساحت

همهٔ ما می‌دانیم که مساحت یک مستطیل برابر با حاصلضرب طول آن در عرض آن بوده و مساحت یک مثلث نصف حاصلضرب قاعده در ارتفاع وارد بر آن می‌باشد. برای یافتن مساحت یک چند ضلعی ابتدا آن را به چند مثلث تجزیه نموده و سپس مساحت‌های مثلث‌های بدست آمده را باهم جمع می‌کنیم. در هندسه ثابت می‌شود که مساحت چند ضلعی اولیه مستقل از نحوهٔ تجزیه آن به مثلث‌ها می‌باشد. به شکل‌های زیر توجه نمائید:

شکل ۶ . ۱

حال این پرسش را مطرح می‌کنیم که چگونه می‌توان مساحت یک ناحیه در صفحه را تعریف نمود هرگاه این ناحیه با یک منحنی محدود شده باشد؟ آیا مطمئن هستیم که چنین ناحیه‌ای حتی دارای مساحت باشد؟

اکنون ناحیه R را در صفحه ،مطابق شکل زیر، در نظر می‌گیریم.

شکل ۶ . ۲

ناحیهٔ R با محور X ها ، خطوط $x=a$و $x=b$، و منحنی با معادلهٔ $y=f(x)$ محدود شده است، که در آن f تابعی پیوسته بر بازهٔ بسته $[a,b]$ می‌باشد. برای سادگی ، به ازای هر $x\in[a,b]$ ، $f(x)\geq 0$ می‌گیریم. می‌خواهیم عددی مانند A را به مساحت ناحیهٔ R نسبت دهیم . فرآیندی حدی را، مشابه آنچه که برای تعریف مساحت یک دایره تعریف شده است، بکار می‌بریم.

مساحت یک دایره به عنوان حد مساحت‌های چند ضلعی‌های منتظم محاطی تعریف می‌گردد هرگاه تعداد اضلاع به طور نامتناهی افزایش یابد. به صورت شهودی درک می‌کنیم که ، هر عددی که برای نمایش A انتخاب گردد،این عدد بایستی لااقل به بزرگی مساحت هر ناحیهٔ چند ضلعی شکل باشد که در R محاط شده است (داخل R قرار گرفته است)، و بایستی کوچکتر از مساحت هر ناحیه چند ضلعی شکل که R را در بر گرفته (R داخل آن قرار گرفته) نباشد.

در ابتدا ناحیه‌ای چند ضلعی شکل تعریف می‌کنیم که در R محاط شده است. بازهٔ بسته $[a,b]$ را به n قسمت تقسیم می‌کنیم. برای بسادگی طول کلیه زیر بازه‌ها را باهم مساوی می‌گیریم، به عنوان مثال Δx.

بنابراین $\Delta x=\dfrac{(b-a)}{n}$. نقاط انتهایی این زیربازه‌ها را با $x_n, x_{n-1},\dots,x_2,x_1,x_0$ نمایش می‌دهیم، که در آن

$$x_0=a, x_1=a+\Delta x,\dots,\ x_i=a+i\Delta x,\dots,x_{n-1}=a+(n-1)\Delta x \text{ و } x_n=b\,.$$

فرض کنیم که زیربازهٔ iام با $[x_{i-1},x_i]$ نشان داده شود. چون f بر بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته است، بر هرکدام از زیر بازه‌ها هم پیوسته می‌باشد. بنابر قضیهٔ مقدار نهائی، نقطه‌ای در هر زیر بازه وجود دارد که در آن f دارای می‌نیمم مطلق است. در زیر بازهٔ i ام، فرض کنیم این نقطه c_i باشد، بنابراین $f(c_i)$ می‌نیمم مطلق تابع f بر زیر بازه $[x_{i-1},x_i]$ است.

تعداد n مستطیل در نظر می‌گیریم که هر کدام دارای عرض Δx و ارتفاع $(i=1,2,...,n)f(c_i)$ هستند.
فرض کنیم حاصلجمع مساحت‌های این n مستطیل را با S_n نمایش داده باشیم، در این صورت

$$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_i)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x$$

یا

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x. \qquad (1)$$

جمع طرف راست معادلهٔ (1) حاصلجمع مساحت‌های n مستطیل محاطی را بدست می‌دهد بنابراین هر مقداری که A را تعریف کنیم، این مقدار بایستی چنان باشد که

$$A \geq S_n$$

ما به S_n **تقریب نقصانی** A می‌گوییم. در شکل‌های زیر ناحیهٔ هاشورزده شده مساحت S_n را نشان می‌دهد. بدیهی است که با افزایش n اختلاف S_n با A کمتر می‌گردد. البته دقت کنید که در شکل (الف) تابع f در بازهٔ $[a,b]$ صعودی است و بنابراین می‌نیمم مطلق تابع در $[x_{i-1},x_i]$ برابر با $f(c_i)=f(x_{i-1})$ است یعنی $c_i = x_{i-1}$. اما همانطور که ملاحظه می‌شود در شکل (ب) در قسمت‌هایی از $[a,b]$ تابع f صعودی و در قسمت‌هایی از $[a,b]$ نزولی است و این محل c_i را در $[x_{i-1}-x_i]$ تغییر می‌دهد.

شکل ۶ . ۳

وقتی n افزایش می‌یابد. مقادیر S_n از معادلهٔ (1) افزایش می یابند، و اختلاف مقادیر متوالی S_n از یکدیگر به قدر دلخواه کوچک می‌گردد. این مطلب که در کتاب های حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است، بیان می‌کندکه :

اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه وقتی n به طور نامتناهی افزایش یابد، مقدار S_n که با (1) داده شده است به یک حد میل می‌کند . این مقدار حدی است که ما آن را به عنوان تعریف مساحت ناحیهٔ R در نظر می‌گیریم.

تعریف: فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته بوده و به ازای هر $x \in [a,b]$، $f(x) \geq 0$. فرض کنیم R ناحیه‌ای در صفحه باشد که با منحنی $y = f(x)$ ، محور X ها ، و خطوط $x = b, x = a$ محدود شده باشد. بازهٔ $[a,b]$ را به n زیر بازه تقسیم می‌کنیم که طول هر کدام $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ است، و زیر بازهٔ iام را با $[x_{i-1}, x_i]$ نمایش می‌دهیم. در این صورت اگر $f(c_i)$ مقدار می نیمم مطلق تابع بر زیر بازهٔ iام باشد، آنگاه مساحت ناحیه R با

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \qquad (2)$$

داده شده است.

معادلهٔ (2) بدین معنی است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $N > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $n > N$ ، آنگاه $\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x - A \right| < \varepsilon$ که در ان n عدد صحیح و مثبتی است.

برای بدست آوردن مساحت ناحیهٔ R می‌توانیم از مستطیل‌های محیطی بجای مستطیل‌های محاطی استفاده کنیم.

در این حالت، به عنوان ارتفاع‌های مستطیل‌ها مقدار ماکزیمم مطلق f بر هر زیر بازه را در نظر می‌گیریم. وجود مقدار ماکزیمم مطلق f بر هر زیر بازه توسط قضیهٔ مقدار نهایی تضمین شده است. حاصلجمع های متناظر مساحت‌های مستطیل‌های محیطی لااقل به بزرگی مساحت ناحیهٔ R است، و می‌توان نشان داد که حد این حاصلجمع‌ها وقتی n به طور نامتناهی افزایش پیدا می‌کند دقیقاً همان حد حاصلجمع‌های مساحت‌های مستطیل‌های محاطی است. بنابراین، می‌توانیم مساحت ناحیهٔ R را با

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x \qquad (3)$$

تعریف کنیم که در آن $f(d_i)$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع f در $[x_{i-1}, x_i]$ است.

ما به $S'_n = \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x$ **تقریب اضافی** A می‌گوییم که در شکل‌های زیر ملاحظه خواهید نمود.

توجه کنید که ارتفاع در زیر بازهٔ iام را در حقیقت می‌توان مقدار تابع در هر نقطه‌ای از زیر بازهٔ iام اختیار نمود، وحد حاصلجمع مساحت‌های مستطیل‌ها مقدار یکسانی است صرفنظر از آن که نقاط داخل زیر بازه‌ها چگونه انتخاب شده باشند . این مطلب هم در کتاب های حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است . به شکل‌های زیر جهت توضیح بیشتر توجه نمائید:

شکل ۶ . ۴

در اینجا نیز می‌توان توضیحاتی مشابه آنچه که در مورد شکل‌های (الف) و (ب) بیان کردیم ارائه نمود.

نکته: در محاسبهٔ مساحت زیر یک منحنی (به روشی که در بالا بیان نمودیم) نیاز به فرمول‌های زیر داریم:

$$S_1 = 1+2+3+\ldots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_1)^2$$

$$S_4 = 1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

و الی آخر.

درستی این فرمول‌ها را ، در صورتی که مقدار حاصلجمع داده شده باشد، می‌توان به استقرار ثابت نمود. راه‌دیگری نیز هست که به تدریج با دانستن S_1 فرمولی برای S_2، با دانستن S_2 فرمولی برای S_3 و ... پیدا می‌شود و بدین ترتیب این امکان وجود دارد که S_n را به ازای هر عدد طبیعی n محاسبه نماییم (هرچند که عملاً راهی طولانی را می‌بایستی طی کنیم).

در مواردی نیاز داریم که اندیس جمع‌بندی را تغییر دهیم . به طور کلی ثابت می‌کنیم که

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p} = \sum_{i=m-p}^{n-p} a_{i+p}$$

که در آن p عددی صحیح و مثبت است. به عنوان مثال

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

و

$$\sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p} = a_{m+p-p} + a_{m+p+1-p} + \ldots + a_{n+p-p} = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n .$$

در نتیجه $\sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p} = \sum_{i=m}^{n} a_i$. بنابراین ،با استفاده از فرمول‌های بالا،بسادگی دیده می‌شود که

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i , \qquad \sum_{i=1}^{n}(i-1) = \sum_{i=0}^{n-1} i , \qquad \sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} i^2 .$$

مثال ۱: مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $y = f(x) = x^3$ ، محور X ها و خطوط $x=1$ و $x=4$ را محاسبه نمایید، یکبار با استفاده از مستطیل‌های محاطی و بار دیگر با استفاده از مستطیل‌های محیطی.

حل. دربازهٔ بسته $[1,4]$ تابع $f(x) = x^3$ صعودی اکید است. اگر این بازه را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم طول هر قسمت مساوی با $\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$ خواهد بود. دو حالت در نظر می‌گیریم.

شکل ۶ . ۵

حالت اول، استفاده از مستطیل‌های محاطی:

اگر نقاط تقسیم را $x_n = 4$ و $x_0 = 1, x_1 = 1+\Delta x,\ \ x_2 = 1+2\Delta x, \dots\ \ , x_{n-1} = 1+(n-1)\Delta x$ در نظر بگیریم، آنگاه در زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ مقدار می‌نیمم مطلق تابع f در نقطه x_{i-1} پدید می‌آید، یعنی، $c_i = x_{i-1}$ و لذا مقدار می‌نیمم مطلق تابع در $[x_{i-1}, x_i]$عبارت است از $f(c_i) = f(x_{i-1})$.

اکنون تقریب نقصانی مساحت را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
S_n &= f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} {x_i}^3 \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} (1+i\Delta x)^3 \Delta x = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} (1+i\Delta x)^3 \\
&= \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1+\frac{3i}{n})^3 = \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1+3\times\frac{3i}{n}+3\frac{9i^2}{n^2}+\frac{27i^3}{n^3}) \\
&= \frac{3}{n}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i + \frac{27}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2 + \frac{27}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}i^3\right\} \\
&= \frac{3}{n}\left\{(n-1) + \frac{9}{n}\times\frac{n(n-1)}{2} + \frac{27}{n^2}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{27}{n^3}\ \frac{(n-1)^2 n^2}{4}\right\} \\
&= \left\{3 - \frac{3}{n} + \frac{27}{2}\times\frac{n-1}{n} + \frac{27}{2}\times\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} + \frac{81}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2}\right\}.
\end{aligned}$$

اکنون

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty}\ S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{3 - \frac{3}{n} + \frac{27}{2}\times\frac{n-1}{2} + \frac{27}{2}\times\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} + \frac{81}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2}\right\} \\
&= 3 + \frac{27}{2} + \frac{54}{2} + \frac{81}{4} = \frac{255}{4}.
\end{aligned}$$

و این محاسبهٔ مساحت با استفاده از تقریب نقصانی است.

حالت دوم، استفاده از مستطیل‌های محیطی:

اگر مانند حالت اول نقاط تقسیم را

$$x_0 = 1\ ,\ x_1 = 1+\Delta x\ , x_2 = 1+2\Delta x, \dots,\ x_{n-1} = 1+(n-1)\Delta x \text{ و } x_n = 4$$

در نظر بگیریم ، آنگاه در زیر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع f در نقطهٔ x_i پدید می‌آید ، یعنی ، $c_i = x_i$ و لذا مقدار ماکزیمم مطلق تابع در $[x_{i-1}, x_i]$ عبارت است از $f(c_i) = f(x_i)$. حال تقریب اضافی مساحت را می نویسیم:

$$S'_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\sum_{i=1}^{n} {x_i}^3\Delta x=\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+i\Delta x)^3$$
$$=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+3\times\frac{3i}{n}+3\frac{9i^2}{n^2}+\frac{27i^3}{n^3})$$
$$=\frac{3}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{27}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^3\right\}$$
$$=\frac{3}{n}\left\{n+\frac{9}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{27}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{27}{n^3}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right\}$$
$$=\left\{3+\frac{27}{2}\times\frac{n+1}{n}+\frac{27}{2}\times\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}+\frac{81}{4}\times\frac{(n+1)^2}{n^2}\right\}$$

اکنون به سادگی دیده می‌شود که $A=\lim_{n\to\infty} S'_n=\frac{255}{4}$ و این محاسبه مساحت با استفاده از تقریب اضافی است.

مثال ۲: (i) مساحت زیر خط $y=f(x)=mx$ (برای $m>0$) را بین 2 و b (که $b>2$)، با استفاده از تعریف حد حاصلجمع حساب کنید.

(ii) مساحت محصور بین نمودار تابع $y=f(x)=4-x^2$ و محور X ها و خطهای $x=0$ و $x=-2$ را با استفاده از تقریب اضافی بدست آورید.

(iii) مساحت محصور بین نمودار تابع $y=f(x)=4x-x^2$ و خطهای $x=2$ و $x=4$ را با استفاده از تقریب نقصانی بدست آورید.

حل. (i) بازهٔ بسته $[2,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم ، یعنی، $\Delta x=\frac{b-2}{n}$ و لذا $x_0=2, x_1=2+\Delta x,..., x_i=2+i\Delta x,..., x_{n-1}=2+(n-1)\Delta x$ و $x_n=b$.

چون $f'(x)=m>0$ پس تابع بر $[2,b]$ صعودی اکید است.

شکل ۶ . ۶

از تقریب اضافی استفاده نموده و دربازهٔ $\left[x_{i-1},x_i\right]$ مقدار $c_i=x_i$ $(i=1,2,...,n)$ اختیار می‌کنیم، یعنی، تابع f بربازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ در نقطه x_i دارای ماکزیمم مطلق $f(x_i)=mx_i$ است. داریم

$$\begin{aligned}
S_n' &= f(c_1)\Delta x+f(c_2)\Delta x+...+f(c_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x\\
&=\sum_{i=1}^{n}mx_i\Delta x=m\Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i=m\Delta x\sum_{i=1}^{n}(2+i\Delta x)\\
&=\frac{m(b-2)}{n}\sum_{i=1}^{n}\,(2+\frac{(b-2)}{n}i)\;=\frac{m(b-2)}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}2+\sum_{i=1}^{n}\frac{(b-2)}{n}i\right\}\\
&=\frac{m(b-2)}{n}\left\{2n+\frac{b-2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}\right\}=m\left\{2b-4+\frac{(b-2)^2}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}\right\}
\end{aligned}$$

و بنابراین

$$A=\lim_{n\to\infty}S_n'=\lim_{n\to\infty}\;\;m\left\{2b-4+\frac{(b-2)^2}{2}\right\}=\frac{m}{2}\left(b^2-4\right).$$

(ii) داریم $y=f(x)=4-x^2$ و $y=0$ نتیجه می‌دهد که $x=\pm 2$. همچنین $f'(x)=-2x$ و تابع f در بازهٔ $[-2,0]$ صعودی اکید است. بازه $[-2,0]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و داریم $\Delta x=\dfrac{0-(-2)}{n}=\dfrac{2}{n}$.

شکل ۶ . ۷

پس $x_0=-2,x_1=-2+\Delta x,...,x_i=-2+i\Delta x,...,x_n=0$.

از تقریب اضافی استفاده نموده و در بازهٔ $\left[x_{i-1},x_i\right]$ مقدار $c_i=x_i$ $(i=1,2,...,n)$اختیار می‌کنیم ،یعنی ،تابع f بر بازهٔ $\left[x_{i-1},x_i\right]$ دارای ماکزیمم مطلق $f(x_i)=4-x_i^{\,2}$ می‌باشند. داریم

$$S'_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}(4 - x_i^{\,2})\Delta x = \Delta x \sum_{i=1}^{n}[4 - (-2 + i\Delta x)^2]$$
$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}[4 - (-2 + \frac{2i}{n})^2] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[4 - 4 + \frac{8i}{n} - \frac{4i^2}{n^2}\right]$$
$$= \frac{2}{n}\left[\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right] = \frac{2}{n}\left[\frac{8}{n}\times\frac{n(n+1)}{2} - \frac{4}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$
$$= \frac{8(n+1)}{n} - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}.$$

بنابراین

$$A = \lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8(n+1)}{n} - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}\right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{30}.$$

(iii) داریم $y = f(x) = 4x - x^2$ و بنابراین $f'(x) = 4 - 2x$ و $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. دیده می‌شود که دربازهٔ $[2,4]$ تابع f نزولی اکید است.

شکل ۶ . ۸

بازهٔ بسته $[2,4]$را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، یعنی، $\Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$ و لذا

$$x_0 = 2, x_1 = 2 + \Delta x, ..., x_i = 2 + i\Delta x, ..., x_n = 4.$$

از تقریب نقصانی استفاده نموده و دربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ مقدار $c_i = x_i \ (i = 1, 2, .., n)$ اختیار می‌کنیم، یعنی، تابع f دربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ دارای می نیمم مطلق $f(x_i) = 4x_i - x_i^{\,2}$ است.

داریم

$$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(4x_i-x_i{}^2)\Delta x=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[4(2+\frac{2i}{n})-(2+\frac{2i}{n})^2\right]\\
&=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[8+\frac{8i}{n}-4-\frac{8i}{n}-\frac{4i^2}{n^2}\right]=\frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}4-\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right]\\
&=\frac{2}{n}\left[4n-\frac{4}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=8-\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}.
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$A=\lim_{n\to\infty} S_m=\lim_{n\to\infty}(8-\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2})=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}.$$

مثال ۳: مساحت محصور بین نمودار $y=f(x)=x^3-x$ و محور X ها بدست آورید.

حل . داریم $f(x)=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ یا $x=\pm 1$.

همچنین $f'(x)=3x^2-1$ و

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

دیده می‌شود که $f(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{-2\sqrt{3}}{9}$ و $f(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ نمودار تابع f در زیر رسم شده است.

شکل ۶. ۹

در بازه $[-1,0]$ تابع f نامنفی و در بازهٔ $[0,1]$ تابع f نامثبت است . چون از تبدیل x به $-x$ بدست می آوریم که y به $-y$ تبدیل می‌شود پس نمودار منحنی نسبت مبداء مختصات متقارن است. مساحت ناحیهٔ A_1 برابر با مساحت ناحیهٔ A_4 و مساحت ناحیه A_2 برابر با مساحت ناحیه A_3 است. به عنوان مثال می‌توان A_4, A_3 را محاسبه نمود. ابتدا به محاسبهٔ A_3 می‌پردازیم. توجه کنید که مساحت کمیتی نامنفی است. چون در $[0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$ همواره $f(x)\le 0$ و نیز Δx (به عنوان طول

یک بازه)عدد مثبتی است، پس $f(c_i)\Delta x \le 0$ و بنابراین $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \le 0$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای محاسبه مساحت A_3 بایستی با تابع $y=-f(x)=-(x^3-x)$ کار کنیم تا نتیجه کمیتی نامنفی گردد. بازهٔ $[0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم یعنی، $\Delta x=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-0}{n}=\frac{\sqrt{3}}{3n}$.

پس $x_0=0, x_1=\Delta x,\dots,x_i=i\Delta x,\dots,x_n=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

چون تابع $f(x)$ در $[0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$ نزولی اکید است پس تابع $-f(x)$ بر $[0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$ صعودی اکید خواهد شد. از تقریب اضافی استفاده می‌کنیم و مقدار ماکزیمم مطلق تابع $-f(x)$ در $[x_{i-1},x_i]$ در نقطه $c_i=x_i$ واقع می‌گردد، یعنی، تابع $-f(x)$ در بازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ دارای ماکزیمم مطلق $-f(x_i)$ است.

اکنون داریم

$$\begin{aligned}
S'_n &= \left(-f(c_1)\right)\Delta x+\left(-f(c_2)\right)\Delta x+\dots+\left(-f(c_n)\right)\Delta x\\
&=-\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x=-\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\\
&=-\Delta x\sum_{i=1}^{n} f(x_i)=-\Delta x\sum_{i=1}^{n}(x_i^3-x_i)=-\Delta x\sum_{i=1}^{n}\left[\left(i\Delta x\right)^3-\left(i\Delta x\right)\right]\\
&=-(\Delta x)^2[(\Delta x)^2\sum_{i=1}^{n} i^3-\sum_{i=1}^{n} i]=-(\frac{\sqrt{3}}{3n})^2[(\frac{\sqrt{3}}{3n})^2\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)}{2}]\\
&=-\frac{1}{3n^2}\left[\frac{1}{12}\left(n+1\right)^2-\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{n(n+1)}{6n^2}-\frac{\left(n+1)^2\right)}{36n^2}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$A_3=\lim_{n\to\infty} S'_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{n(n+1)}{6n^2}-\frac{(n+1)^2}{36n^2})=\frac{5}{36}.$$

سپس به محاسبهٔ A_4 می‌پردازیم. چون تابع $f(x)$ بر $[\frac{\sqrt{3}}{3},1]$ نامثبت است می‌باید (برای محاسبه مساحت از تابع $-f(x)=-(x^3-x)$ استفاده می‌کنیم. تابع $f(x)$ بر $[\frac{\sqrt{3}}{3},1]$ صعودی اکید است و لذا تابع $-f(x)$ براین بازه نزولی اکید است . بازهٔ $[\frac{\sqrt{3}}{3},1]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم ، یعنی، $\Delta x=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{n}=\frac{3-\sqrt{3}}{n}$.

پس

$$x_0=\frac{\sqrt{3}}{3},x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}+\Delta x,...,x_i=\frac{\sqrt{3}}{3}+i\Delta x,...,x_n=1.$$

برای محاسبهٔ مساحت A_4 از تقریب نقصانی استفاده می‌کنیم.

$$S_n=-f(c_1)\Delta x+\left(-f(c_2)\right)\Delta x+...+\left(-f\left(c_n\right)\right)\Delta x=-\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x$$

$$=-\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(c_i)=-\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

به دلیل آن که می‌نیمم مطلق تابع $-f(x)$ بر $\left[x_{i-1},x_i\right]$ در نقطه $c_i=x_i$ واقع می‌گردد. بنابراین

$$S_n=-\Delta x\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,3}-x_i\right)=-\Delta x\sum_{i=1}^{n}\left[(\frac{\sqrt{3}}{3}+i\Delta x)^3-(\frac{\sqrt{3}}{3}+i\Delta x)\right]$$

$$=-(\frac{3-\sqrt{3}}{3n})\sum_{i=1}^{n}\left[(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{3-\sqrt{3}}{3n}i)^3-(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{3-\sqrt{3}}{3n}i)\right]$$

$$=-(\frac{3-\sqrt{3}}{3n})\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3\sqrt{3}}{27}+3(\frac{\sqrt{3}}{3})^2(\frac{3-\sqrt{3}}{3n}i)+3(\frac{3-\sqrt{3}}{3n})^2i^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3}{27n^3}i^3-(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{3-\sqrt{3}}{3n})i\right]$$

$$=-(\frac{3-\sqrt{3}}{3n})\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{3-\sqrt{3}}{3n}\sum_{i=1}^{n}i+\sqrt{3}\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{9n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right.$$

$$\left.+\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3}{27n^3}\sum_{i=1}^{n}i^{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\sum_{i=1}^{n}1-\frac{3-\sqrt{3}}{3n}\sum_{i=1}^{n}i\right]$$

$$=-(\frac{3-\sqrt{3}}{3n})\left[\frac{\sqrt{3}}{9}n+\frac{3-\sqrt{3}}{3n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\sqrt{3}\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{9n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3}{27n^3}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}n-\frac{3-\sqrt{3}}{3n}\times\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=-(\frac{3-\sqrt{3}}{3n})\left[\frac{-2\sqrt{3}}{9}n+\frac{\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)^2\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{54n}+\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3\left(n+1\right)^2}{108n}\right]$$

$$=-\left(3-\sqrt{3}\right)\left[\frac{-2\sqrt{3}}{27}+\frac{\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)^2(n+1)(2n+1)}{162n^2}+\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3(n+1)^2}{324n^2}\right].$$

اما $A_4=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ و لذا

$$A_4=\left(\sqrt{3}-3\right)\left[\frac{-2\sqrt{3}}{27}+\frac{\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{162}\times 2+\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^3}{324}\right].$$

و پس از محاسبه دیده می‌شود که $A_4=\frac{1}{9}$. بدین طریق با توضیحاتی که در اول مثال دادیم مساحت بدست می آید.

۶ . ۲ انتگرال معین

در قسمت قبل مساحت یک ناحیه را به صورت زیر تعریف نمودیم :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\,\Delta x\,. \qquad (1)$$

برای رسیدن به چنین تعریفی، بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ را به زیر بازه‌های با طول مساوی تقسیم کرده و سپس c_i را نقطه‌ای در بازهٔ i ام در نظر گرفتیم که تابع f در آن می‌نیمم مطلق (یا ماکزیمم مطلق) بود. ما همچنین این محدودیت را قائل شدیم که $f(x)$ بر $[a,b]$ همواره نامنفی بوده و به علاوه f بر $[a,b]$ پیوسته باشد.

برای تعریف انتگرال معین نیاز به نوع جدیدی از فرآیند حدی داریم که با توجه به آن حد داده شده در (1) تنها یک حالت خاص است. بازهٔ $[a,b]$ را با انتخاب $n-1$ نقطه دلخواه بین b,a به n زیر بازه تقسیم می‌کنیم. فرض کنیم $x_n=b, x_0=a$ و $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ نقاط میانی باشند به طوری‌که

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

نقاط $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ لزوماً متساوی‌الفاصله نیستند. فرض کنیم Δx_1 طول اولین زیر بازه باشد یعنی، $\Delta x_1=x_1-x_0$، فرض کنیم Δx_2 طول دومین زیر بازه باشد یعنی، $\Delta x_2=x_2-x_1$ و الی آخر، به طوری که طول i امین زیر بازه Δx_i بوده و $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

مجموعهٔ همهٔ چنین زیربازه‌هایی از بازهٔ $[a,b]$ یک **افراز** بازهٔ $[a,b]$ نامیده می‌شود. شکل زیر افرازی مانند Δ از $[a,b]$ را به تصویر می‌کشد :

شکل ۶ . ۱۰

افراز Δ شامل n زیر بازه است. حداقل یکی از این زیر بازه‌ها دارای بیشترین طول است. طول چنین زیر بازه‌ای از افراز Δ، **نُرم افراز** نامیده شده و با $\|\Delta\|$ نشان داده می‌شود.

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$، که در آن $a<b$، پیوسته باشد. افرازی مانند Δ برای $[a,b]$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$a = x_0\,, x_1\,, x_2\,, \ldots, x_{n-1}\,, x_n = b$$

که در آن

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

و قرار می‌دهیم $\Delta x_1 = x_1 - x_0\,, \Delta x_2 = x_2 - x_1\,, \ldots,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. نقاط $c_1, c_2, \ldots, c_n$ را به ترتیب در زیر بازه‌های $[x_0\,, x_1]$ ، $[x_1\,, x_2]$ ، ... ، $[x_{n-1}\,, x_n]$ چنان انتخاب می‌کنیم که

$$x_0 \le c_1 \le x_1\,, x_1 \le c_2 \le x_2\,, \ldots\ldots, x_{n-1} \le c_n \le x_n\,.$$

در هر یک از این نقاط مقدار تابع $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$ را پیدا کرده و حاصلجمع زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$S_n = R_n(f) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (*)$$

این حاصلجمع را **حاصلجمع ریمان** تابع f (یا یک **حاصلجمع انتگرال** تابع f) روی بازهٔ $[a,b]$ برای افراز Δ می‌نامند. به شکل زیر توجه نمایید:

شکل ۶ . ۱۱

فرض کنیم M, m به‌ترتیب می‌نیمم و ماکزیمم مطلق تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشند.

چون تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است. پس به هر زیر بازهٔ $[x_{i-1},x_i]$، $i=1,2,....,n$ نیز پیوسته می‌باشد. اکنون فرض کنیم که تابع f در نقاط $l_1,u_1\in[x_0,x_1]$ به ترتیب دارای می‌نیمم مطلق $m_1=f(l_1)$ و ماکزیمم مطلق $M_1=f(u_1)$ باشد،

در نقاط $l_2,u_2\in[x_1,x_2]$ به ترتیب دارای می‌نیمم مطلق $m_2=f(l_2)$ و ماکزیمم مطلق $M_2=f(u_2)$ باشد،

....

در نقاط $l_n,u_n\in[x_{n-1},x_n]$ به ترتیب دارای می‌نیمم مطلق $m_n=f(l_n)$ و ماکزیمم مطلق $M_n=f(u_n)$ باشد.

در این صورت

$$\underline{S}_n=L_n(f)=f(l_1)\Delta x_1+f(l_2)\Delta x_2+...+f(l_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(l_i)\Delta x_i$$

را **حاصلجمع پایین ریمان** تابع f در بازهٔ $[a,b]$ برای افراز Δ و

$$\overline{S}_n=U_n(f)=f(u_1)\Delta x_1+f(u_2)\Delta x_2+...+f(u_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(u_i)\Delta x_i$$

را **حاصلجمع بالای ریمان** تابع f در بازهٔ $[a,b]$ برای افراز Δ می‌نامیم.

چون به ازای هر $c_i\in[x_{i-1},x_i]$ داریم $f(l_i)\le f(c_i)\le f(u_i)$ و هر $\Delta x_i>0$، نتیجه می‌شود که

$$f(l_i)\Delta x_i\le f(c_i)\Delta x_i\le f(u_i)\Delta x_i \qquad (i=1,2,...,n)$$

و بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n}f(l_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}f(u_i)\Delta x_i$$

یعنی،

$$L_n(f)\le R_n(f)\le U_n(f).$$

به عبارت دیگر،

$$\underline{S}_n\le S_n\le\overline{S}_n \qquad (2)$$

تعبیر هندسی نامساوی اخیر برای $f(x)\ge 0$ در این حقیقت نهفته است که ناحیه‌ای که مساحتش برابر با S_n است بین مساحت‌های $\overline{S}_n,\underline{S}_n$ قرار دارد، یعنی، برای S_n یک کران پایین و یک کران بالا پیدا کرده‌ایم. به شکل زیر توجه نمایید :

شکل ۶ . ۱۲

حال به بیان بعضی از خواص حاصلجمع‌های بالا و پایین ریمان می‌پردازیم :

(a)چون به ازای هر $i=1,2,...,n$ ، $f(l_i)=m_i \le M_i = f(u_i)$ و $\Delta x_i > 0$،

پس $f(l_i)\Delta x_i \le f(u_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,...,n)$ و لذا

$$\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i \Leftrightarrow L_n(f) \le U_n(f).$$

(تساوی در حالتی اتفاق می‌افتد که f تابعی ثابت باشد.)

(b)چون

$$m_1 \ge m, m_2 \ge m, ..., m_n \ge m$$

که در آن m می‌نیمم مطلق تابع f بر $[a,b]$است، داریم

$$\begin{aligned}\underline{S}_n &= m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + ... + m_n\Delta x_n \ge m\Delta x_1 + m\Delta x_2 + ... + m\Delta x_n \\ &= m(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n) = m(b-a)\end{aligned}$$

بنابراین

$$L_n(f) = \underline{S}_n \ge m(b-a). \qquad (3)$$

(c) چون

$$M_1 \le M, M_2 \le M, ..., M_n \le M$$

که در آن M ماکزیمم مطلق تابع f بر $[a,b]$ است، داریم

$$\begin{aligned}\overline{S}_n &= M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + ... + M_n\Delta x_n \le M\Delta x_1 + M\Delta x_2 + ... + M\Delta x_n \\ &= M(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n) = M(b-a)\end{aligned}$$

بنابراین

$$U_n(f) = \overline{S}_n \le M(b-a). \qquad (4)$$

در نتیجه از (2)، (3) و (4) بدست می‌آوریم

$$m(b-a) \le \underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n \le M(b-a). \qquad (5)$$

اکنون برای بیان تعریف زیر آماده هستیم.

تعریف : اگر برای هر افراز دلخواه Δ از بازهٔ $[a,b]$ به طوری که $\|\Delta\| \to 0$ و هر انتخاب نقطهٔ c_i در زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ حاصلجمع ریمان

$$S_n = R_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

به سمت حد منحصر به فرد S میل کند، آنگاه ایـن **حد انتگرال معین تابع** f **بر بـازهٔ** $[a,b]$ نامیده شده و با

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

نمایش داده می‌شود. لذا، بنابر تعریف ،

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

،یعنی، به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری‌که به ازای هر افراز Δ که برای آن $\|\Delta\| < \delta$ و هر انتخاب c_i در بازهٔ بستهٔ $[x_{i-1}, x_i]$، $i = 1,2,\dots,n$:

$$|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - S| < \varepsilon.$$

عدد a را **حد پایینی انتگرال**، b را **حد بالایی انتگرال** و f را **تابع زیر انتگرال** می‌نامند.
بازهٔ $[a,b]$، **بازهٔ انتگرال‌گیری** و x **متغیر انتگرال‌گیری** نامیده می‌شود.
علامت انتگرال « $\int$ » کشیده شدهٔ حرف S است که برای لغت حاصلجمع « SUM » بکار می‌رود و علامت dx همان دیفرانسیل متغیر x است.

تعریف : اگر برای تابع f حد (6) وجود داشته باشد، در این صورت می‌گوییم تابع f بر بـازهٔ $[a,b]$ **انتگرال‌پذیر** است.

تبصره : در تعریف افراز بازه‌ای مانند $[a,b]$ جهت یافتن حاصلجمع ریمان بـرای افـرازی مثـل Δ، اگر کلیهٔ زیر بازه‌ها دارای طول مساوی باشند، یعنی،

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{b-a}{n} = \Delta x$$

آنگاه افراز Δ را یک **افراز منظم** بازه بسته $[a,b]$ می‌نامند. در چنین وضعیتی

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x\ .$$

نکته : در یک افراز منظم مانند Δ از بازهٔ $[a,b]$، اگر $\|\Delta\| \to 0$، یعنی طول بزرگترین زیر بـازه به سمت صفر میل کند، آنگاه طول هرزیر بازه به سمت صفر میل کرده و لذا $n \to +\infty$.
برعکس اگر $n \to +\infty$ آنگاه به علت این کـه $\|\Delta\| = \frac{b-a}{n} = \Delta x$، مـی‌بینـیم کـه $\|\Delta\| = \Delta x \to 0$.
بنابراین در چنین وضعیتی، $n \to +\infty$ معادل است با $\Delta x \to 0$.

نکات مهم : (1) توجه می‌کنیم که حاصلجمع‌های پایین ریمان $\underline{S}_n = L_n(f)$ و بالای ریمان $\overline{S}_n = U_n(f)$ حالت‌های خاصی از حاصلجمع (*) می‌باشند، و بنابراین اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه حاصلجمع‌های بالایی و پایینی ریمان به همان حد S میل می‌کنند و بنابراین،

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

و

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

و به ویژه، اگر افراز Δ یک افراز منظم باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

و

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

و در حقیقت، این تساوی $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(f) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(f)$ به عنوان تعریف انتگرال معینِ تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ در نظر گرفته شده است، امّا اکنون شما تعریف انتگرال معین را در حالت کلّی‌تر دیده‌اید.

(2) در شکل کلّی تعریف انتگرال معین تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ لزومی ندارد که حتی تابع f بر $[a,b]$ پیوسته فرض شود، بلکه کافی است که حد تعریف شده به عنوان انتگرال معین وجود داشته باشد.

تعبیر هندسی انتگرال معین :

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و نامنفی باشد. در این صورت انتگرال معین تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ از نظر عددی برابر است با مساحت ناحیه‌ای که به منحنی $y = f(x)$، خطوط $x = a$، $x = b$ و محور X ها محدود شده است یعنی،

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (7)$$

شکل ۶ . ۱۳

حال این پرسش را مطرح می‌کنیم که تحت چه شرایطی انتگرال معین تابعی مانند f بر بازهٔ بسته‌ای مانند $[a,b]$ وجود دارد ؟ قضیهٔ زیر شرطی کافی برای وجود انتگرال معین را بدست می‌دهد.

قضیهٔ ۱ (قضیهٔ وجودی انتگرال معین) : اگر تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر این بازه انتگرال پذیر است، یعنی، $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود است.

اثبات. به استناد مطالب گفته شده تا این مرحله (و البته قدری تلاش) این امکان برای ما وجود دارد که قضیه بسیار مهم مورد نظر را ثابت کنیم، با وجود این تنها به جهت رعایت اختصار از این کار صرفنظر می‌نماییم.

نکته : (1) بایستی توجه نمود که انتگرال معین تنها به شکل تابع f و حدود انتگرال‌گیری بستگی داشته و به متغیر انتگرال‌گیری، که آن رابا هر حرفی می‌توان نمایش داد؛ بستگی ندارد. بنابراین، بدون آن که مقدار انتگرال معین تغییر کند، می‌توان بجای حرف x هر حرف دیگری را جایگزین نمود :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \dots = \int_a^b f(z)\,dz\,.$$

(2) وقتی که مفهوم انتگرال معینِ $\int_a^b f(x)\,dx$ را معرفی نمودیم این فرض را اعمال کردیم که $a<b$. در حالتی که $b<a$، **بنابر تعریف**، خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

(3) در حالتی که $a=b$ فرض می‌کنیم که، **بنابر تعریف**، برای هر تابع f داشته باشیم

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

البته به شرط آن که $f(a)$ وجود داشته باشد.

مثال ۴ : با استفاده از تعریف انتگرال معین مطلوبست محاسبهٔ

(i) $\quad \int_a^b kx\,dx \quad (a<b)$ $\quad (ii)$ $\int_a^b m\,dx$ که در آن m عدد ثابتی است
(iii) $\int_a^b e^x\,dx$.

حل. (i) از نقطه نظر هندسی، مساله معادل است با محاسبهٔ مساحت S از ذوزنقه‌ای که با خطوط $y=kx$ ، $x=a$ ، $y=0, x=b$ محدود شده است. تابع زیر علامت انتگرال $y=f(x)=kx$ بر R (و به ویژه بر $[a,b]$) پیوسته است.

شکل ۶. ۱۴

بنابراین، برای محاسبهٔ انتگرال معین این حق را داریم که بازهٔ $[a,b]$ را به هر طریقی که می‌خواهیم تقسیم کرده و در بازه‌های تقسیم شده نقاط c_i را به صورت دلخواه انتخاب نماییم. نتیجهٔ محاسبهٔ انتگرال معین، مستقل است از طریقی که حاصلجمع تشکیل می‌شود، به شرط آن که طول زیر بازه‌ها به صفر میل کنند. بازهٔ $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. طول Δx از هر زیر بازه مساوی با $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ است. نقاط تقسیم به صورت زیر می‌باشند :

$$x_0=a, x_1=a+\Delta x, x_2=a+2\Delta x, \ldots, x_i=a+i\Delta x, \ldots, x_n=a+n\Delta x=b.$$

برای نقاط c_i نقاط انتهایی چپ هر زیر بازه را در نظر می‌گیریم :

$$c_1=a, c_2=a+\Delta x, c_3=a+2\Delta x, \ldots, c_n=a+(n-1)\Delta x.$$

حاصلجمع پایین ریمان را برای تابع f تشکیل می‌دهیم؛ داریم $f(c_i)=kc_i$ و لذا

$$\begin{aligned}\underline{S}_n = L_n(f) &= kc_1\Delta x + kc_2\Delta x + ... + kc_n\Delta x \\ &= ka\Delta x + [k(a+\Delta x)]\Delta x + ... + \{k[a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x \\ &= k\{a + (a+\Delta x) + (a+2\Delta x) + ... + [a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x \\ &= k\{na + [\Delta x + 2\Delta x + ... + (n-1)\Delta x]\}\Delta x \\ &= k\{na + [1+2+...+(n-1)]\Delta x\}\Delta x ,\end{aligned}$$

که در آن $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. حال با توجه به این که

$$1+2+...+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} ,$$

بدست می‌آوریم

$$\underline{S}_n = L_n(f) = k[na + \frac{n(n-1)}{2}\frac{b-a}{n}]\frac{b-a}{n} = k[a + \frac{n-1}{n}\frac{b-a}{n}](b-a).$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}$، نتیجه می‌شود که

$$S = \lim_{n\to\infty}\underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} L_n(f) = k[a + \frac{b-a}{2}](b-a) = k\frac{b^2-a^2}{2}.$$

بنابراین $\int_a^b kx\,dx = k\frac{b^2-a^2}{2}$.

توجه : اگر برای نقاط c_i نقاط انتهایی راست هر زیر بازه را در نظر بگیریم ، مجددا بدست می آوریم،

$$S = \lim_{n\to\infty}\overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} U_n(f) = k\frac{b^2-a^2}{2} = \int_a^b kx\,dx.$$

(ii) برای $[a,b]$ افراز منظم Δ را در نظر می‌گیریم (یعنی فاصلهٔ $[a,b]$ را به n قسمت مساوی می‌کنیم). مطابق تعریف داریم

$$\int_a^b m\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^n m\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} m\sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a).$$

در اینجا $\sum_{i=1}^n \Delta x_i$ حاصلجمع طول‌های زیر بازه‌هایی است که از تقسیم $[a,b]$ بدست آمده است. حتی بدون توجه به این که چه افرازی را در نظر بگیریم، حاصلجمع طول زیر بازه‌ها برابر با $b-a$ است.

(iii) بازهٔ $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم :

$$x_0 = a, x_1 = a+\Delta x, ..., x_n = a + n\Delta x \ , \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

در بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ برای c_i نقطهٔ انتهایی چپ را اختیار می‌کنیم، یعنی، $c_i = x_{i-1}$. در این صورت

$$\underline{S}_n = L_n(f) = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \ldots + f(c_n)\Delta x$$
$$= e^a \Delta x + e^{a+\Delta x}\Delta x + \ldots + e^{a+(n-1)\Delta x}\Delta x$$
$$= e^a(1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \ldots + e^{(n-1)\Delta x})\Delta x\,.$$

عبارت داخل پرانتز یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $e^{\Delta x}$ و جملهٔ اول 1 است، بنابراین

$$\underline{S}_n = L_n(f) = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1}\Delta x = e^a(e^{n\Delta x} - 1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}.$$

در این صورت داریم
$$n\Delta x = b - a, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1$$

(بنابر قاعدهٔ هوپیتال، $\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{e^z} = 1$.) بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} L_n(f) = e^a(e^{b-a} - 1) = e^b - e^a$$

یعنی، $\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$.

نکتهٔ مهم : قضیهٔ 1 شرطی کافی برای وجود انتگرال معین یک تابع بر یک بازهٔ بسته را بدست می‌دهد. امّا این شرط لازم نیست، یعنی، ممکن است انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود بوده ولی تابع f بر $[a,b]$ پیوسته نباشد. به مثال زیر توجه نمایید :

مثال ۵ : تابع f با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \neq 0 \\ 1 \ , & x = 0 \end{cases}$$

تعریف شده است. نشان دهید که این تابع در $[-1,1]$ پیوسته نیست ولی $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ موجود است.

حل. ابتدا حاصلجمع پایین ریمان f را بر بازهٔ $[-1,1]$ تشکیل می‌دهیم. داریم

$\Delta x = \frac{1-(-1)}{n} = \frac{2}{n}$ و $x_0 = -1, x_1 = -1 + \Delta x, \ldots, x_i = -1 + i\Delta x, \ldots, x_n = -1 + n\Delta x = 1$.

بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ را در نظر می‌گیریم. چه عدد صفر به این زیر بازه تعلق داشته باشد و چه تعلق نداشته باشد، بدیهی است که می‌نیمم تابع f بر این بازهٔ 0 است، یعنی، $f(l_i) = 0$. بنابراین

$$L_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x = 0.$$

سپس حاصلجمع بالای ریمان تابع f بر بازهٔ $[-1,1]$ را تشکیل می‌دهیم. اگر 0 نقطه‌ای متعلق به بازهٔ باز (x_{i-1}, x_i) باشد، یعنی $x_{i-1}, x_i \neq 0$، آنگاه $u_i = 0, f(u_i) = 1$ و لذا

$$U_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x = 0+\ldots+0+f(u_i)\Delta x+0+\ldots+0$$
$$=f(u_i)\Delta x = 1\times\frac{2}{n}=\frac{2}{n}.$$

امّا اگر، مثلاً $x_i=0$، آنگاه 0 به دو بازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ و $[x_i,x_{i+1}]$ تعلق دارد و لذا در بازهٔ $[x_{i-1},x_i]$، $u_i=x_i=0$ و در بازهٔ $[x_i,x_{i+1}]$، $u_{i+1}=x_i=0$. بنابراین

$$U_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\,\Delta x = 0+\ldots+0+f(u_i)\Delta x+f(u_{i+1})\Delta x+0+\ldots+0=\frac{2}{n}+\frac{2}{n}=\frac{4}{n}.$$

به این دلیل است که در هر حال $0\le U_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x\le\frac{4}{n}$ و بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)=\lim_{n\to\infty} U_n(f)=0$$

، یعنی f بر $[-1,1]$ انتگرال‌پذیر است و $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$.

اکنون به سادگی دیده می‌شود که $\lim_{x\to 0} f(x)=0\ne f(0)$، یعنی، تابع f در نقطهٔ $x=0$ پیوسته نیست و لذا در بازهٔ $[-1,1]$ پیوسته نمی‌باشد.

حال این پرسش را مطرح می‌کنیم که آیا تابعی وجود دارد که بر هیچ بازهٔ بسته‌ای انتگرال‌پذیر نباشد ؟ جواب مثبت است.

مثال ۶ : ثابت کنید که تابع دیریکله،

$$f(x)=\begin{cases}0\ , & x \text{ اصم} \\ 1\ , & x \text{ منطق}\end{cases}$$

بر هیچ بازهٔ بسته‌ای مانند $[a,b]$ انتگرال‌پذیر نمی‌باشد.

حل. افرازی مانند Δ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

که در آن $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$. در حالت اوّل در کلیهٔ زیر بازه‌های $[x_{i-1},x_i]$ نقاط c_i را منطق اختیار می‌کنیم (می‌دانیم که $a<b$ و یادآوری می‌کنیم که بین b,a به تعداد نامتناهی نقاط منطق و نقاط اصم وجود دارد). در این صورت حاصلجمع ریمان

$$R_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\ldots+f(c_n)\Delta x_n$$
$$=1.\Delta x_1+1.\Delta x_2+\ldots+1.\Delta x_n=\Delta x_1+\Delta x_2+\ldots+\Delta x_n=b-a$$

و بنابراین $\lim_{n\to\infty} R_n(f)=b-a$.

در حالت دوم در کلیهٔ زیر بازه‌های $[x_{i-1},x_i]$ نقاط c_i را اصم اختیار می‌کنیم. در این صورت حاصلجمع ریمان

$$R_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$$
$$= 0\Delta x_1 + 0\Delta x_2 + \ldots + 0\Delta x_n = 0$$

و بنابراین $\lim_{n\to\infty} R_n(f)=0$.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\int_a^b f(x)\,dx$ وجود ندارد.

نکتهٔ مهم : اگر دو تابع f و g در تمام نقاط یک بازهٔ بسته تعریف شده و در تمامی نقاط این بازهٔ به استثنای یک نقطه از آن برابر باشند، آنگاه به شرط انتگرال‌پذیری یکی از آن‌ها، دیگری هم انتگرال‌پذیر و مقدار نهایی این دو انتگرال با هم برابر هستند. برای اثبات این مطلب اولاً لازم است که خواص دیگری از انتگرال معین بیان و ثابت گردد (که کار قسمت بعدی است) و ثانیاً نیاز به تعریف «انتگرال توسعی» داریم.

۶. ۳ ویژگی‌های انتگرال معین

در این قسمت برخی از خواص مهم انتگرال معین را بیان و ثابت می‌نماییم. برای ساده‌تر شدن اثبات‌ها معمولاً افراز را یک افراز منظم در نظر می‌گیریم (یعنی در نوشتن حاصلجمع‌های ریمان بازه را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم).

قضیهٔ ۲ : اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر بوده و k عدد حقیقی ثابتی باشد، آنگاه

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

اثبات. بنابر تعریف انتگرال معین داریم،

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\,f(c_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$
$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

توجه کنید که چون، بنابر فرض، $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ موجود است، می‌توان عدد ثابت k را از علامت حد بیرون آورد.

قضیهٔ ۳ : اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیر بر بازهٔ $[a,b]$ باشند، آنگاه

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

، یعنی، تابع $f+g$ هم بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است.

اثبات. بنابر تعریف انتگرال معین داریم،

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(c_i)+g(c_i))\Delta x = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x)$$

و با توجه به انتگرال‌پذیری توابع f و g

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \end{aligned}$$

تعمیم : اگر توابع $f_1, f_2, \dots, f_m$ بر بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشند، آنگاه تابع $f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_m$ نیز بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است و

$$\begin{aligned} &\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_m(x))\,dx \\ &\quad = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx \pm \dots \pm \int_a^b f_m(x)\,dx. \end{aligned}$$

اثبات. با استفاده از قضیهٔ های ۲ و ۳ و استقرای ریاضی می‌توان این مطلب را ثابت نمود.

قضیهٔ ۴ : برای هر سه عدد a، b، c، معادلهٔ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (8)$$

برقرار است، به شرط آن که در معادلهٔ بالا تمامی انتگرال‌ها وجود داشته باشند.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $a<c<b$، و حاصلجمع ریمان تابع f بر $[a,b]$ را تشکیل می‌دهیم. چون حد حاصلجمع انتگرال مستقل است از نحوهٔ تقسیم بازهٔ $[a,b]$ به زیر بازه‌ها، ما $[a,b]$ را به طریقی به زیر بازه‌ها تقسیم می‌کنیم که نقطهٔ c یکی از نقاط تقسیم باشد. در این صورت ما $\sum_a^b$ را، که متناظر است به بازهٔ $[a,b]$، بدو حاصلجمع افراز می‌کنیم : $\sum_a^c$ که متناظر است به $[a,c]$، و $\sum_c^b$، که متناظر است به $[c,b]$. در این صورت

$$\sum_a^b f(c_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(c_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(c_i)\Delta x_i \,.$$

(افراز Δ از بازهٔ $[a,b]$ لزوماً منظم نیست).

حال اگر از رابطهٔ بالا حد بگیریم وقتی $\|\Delta\| \to 0$ (یعنی، $\max \Delta x_i \to 0$) معادلهٔ (8) را بدست خواهیم آورد.

اگر $a<b<c$، آنگاه بر اساس آنچه در بالا ثابت شده است می‌توانیم بنویسیم :

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

یا

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

امّا می‌دانیم که $\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$. بنابراین

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

شکل ۶. ۱۵

این خاصیت به روشی مشابه برای هر حالت دیگری که a، b و c نسبت بهم داشته باشند ثابت می‌گردد. شکل فوق تعبیری هندسی از معادلهٔ (8) است، به عبارت دیگر، وقتی $a<b<c, f(x)>0$ ، آنگاه مساحت ذوزنقه $aABb$ مساوی است با حاصلجمع مساحت های ذوزنقه‌های $cCBb, aACc$.

قضیهٔ ۵ : اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیر بر $[a,b]$ بوده، و به ازای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $f(x)\le g(x)$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,. \qquad (9)$$

اثبات. فرض کنیم $\xi(x)=g(x)-f(x)$. در این صورت به ازای هر $x\in[a,b]$ داریم $\xi(x)\geq 0$. اکنون با توجه به تعریف انتگرال معین (و برای افراز منظم Δ) داریم

$$\int_a^b \xi(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi(c_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(g(c_i)-f(c_i))\Delta x\,.$$

امّا بدیهی است که $\xi(c_i)=g(c_i)-f(c_i)\geq 0$ $\quad$ $.\Delta x>0,(i=1,2,\dots,n)$

بنابراین $\xi(c_i)\Delta x=(g(c_i)-f(c_i))\Delta x\geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n}(g(c_i)-f(c_i))\Delta x\geq 0$

و لذا $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\xi(c_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(g(c_i)-f(c_i))\Delta x\geq 0$، یعنی، $\int_a^b \xi(x)\,dx=\int_a^b(g(x)-f(x))dx\geq 0$ یا $\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$ و از آن نتیجه می‌شود، $\int_a^b g(x)\,dx\geq\int_a^b f(x)\,dx$، که همان (9) است.

اگر $g(x)>0$ و $f(x)>0$ این خاصیت در شکل زیر بخوبی توصیف شده است. چون $g(x)\geq f(x)$، مساحت ذوزنقه منحنی الخط aA_1B_1b از مساحت ذوزنقه منحنی‌الخط aA_2B_2b تجاوز نمی‌کند.

شکل ۶. ۱۶

نتیجه : برای هر تابع f که بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ تعریف شده باشد، نامساوی زیر برقرار است :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|\,dx\,.$$

اثبات. به ازای هر $x\in[a,b]$ نامساوی‌های بدیهی $-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$ برقرار است. حال از قضیهٔ ۵ استفاده می‌کنیم و داریم

$$-\int_a^b|f(x)|\,dx\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b|f(x)|\,dx\,.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|$

و چون بدیهی است که همواره $\int_a^b |f(x)|\,dx \ge 0$، پس $\left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$

و بنابراین

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

نکته : با استفاده از مفهوم انتگرال توسعی می‌توان ثابت نمود که اگر تابعی در یک بازهٔ بستهٔ پیوسته بوده و فقط در تعدادی متناهی نقطه ناپیوستگی داشته باشد و تابع در این نقاط دارای حدود چپ و راست باشد، باز هم تابع در آن بازه انتگرال‌پذیر است.

مثال ۷ : مطلوبست محاسبهٔ $\int_0^3 [x]\,dx$.

حل: می‌دانیم که تابع $f(x)=[x]$ در هر نقطهٔ صحیح ناپیوسته و در هر نقطهٔ غیر صحیح پیوسته است. همچنین اگر $n \in Z$ عدد صحیح دلخواهی باشد آنگاه

$$\lim_{x\to n^+}[x] = n \quad \text{و} \quad \lim_{x\to n^-}[x] = n-1$$

، یعنی، حدود چپ و راست در نقطه صحیح n برای تابع جزء صحیح موجود است. اکنون می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\int_0^3 [x]dx &= \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx + \int_2^3 [x]dx\\ &= \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 2\,dx = 0+(2-1)+2(3-2)\\ &= 1+2 = 3.\end{aligned}$$

قضیهٔ ۶ : فرض کنیم f تابعی پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشد. اگر $m\,,M$ ، به ترتیب مقادیر، می‌نیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع f بر $[a,b]$ باشند، آنگاه

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \qquad (10)$$

اثبات: چون f بر $[a,b]$ پیوسته است، بنابر قضیه مقدار نهایی وجود ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق تابع f بر $[a,b]$ تضمین شده است. حال به ازای هر $x\in[a,b]$،

$$m \le f(x) \le M$$

و لذا، با استفاده از قضیهٔ ۵،

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx .$$

امّا بنابر مثال ۴ (ii)، $\int_a^b M\,dx = M(b-a), \int_a^b m\,dx = m(b-a)$. بنابراین

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

از تقسیم طرفین نامساوی‌های فوق بر عدد مثبت $b-a$ بدست می‌آوریم،

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M \qquad (11) .$$

تعبیر هندسی قضیهٔ ۶ : فرض کنیم تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و نامنفی باشد، یعنی به ازای هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم، $f(x) \ge 0$. در این صورت انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ مساحت ناحیه‌ای را بدست می‌دهد که محدود است به منحنی $y = f(x)$، محور X ها، و خطوط $x = a$, $x = b$. این مساحت بزرگتر از مساحت مستطیلی است که ابعاد آن $m, (b-a)$ هستند و کوچکتر از مساحت مستطیلی است که ابعادش $M, (b-a)$ می‌باشند.

شکل ۶. ۱۷

تبصره : مقدار $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ را **مقدار متوسط یا میانگین** تابع f در بازهٔ $[a,b]$ می‌نامند. در زیر توضیحی برای این نامگذاری ارائه می‌دهیم :

برای بازهٔ $[a,b]$ افراز منظم Δ را در نظر می‌گیریم، یعنی، $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و

$$a = x, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, ..., x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x, x_n = b.$$

می‌دانیم که اگر تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، مقدار انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ مستقل است از نحوهٔ تقسیم بازهٔ $[a,b]$ به زیر بازه‌های $[x_{i-1}, x_i]$ و نیز مستقل است از نحوهٔ انتخاب نقطهٔ c_i در زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$. اکنون حاصلجمع ریمان زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\times\frac{b-a}{n} = (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}.$$

چون، بنا بر فرض، انتگرال معین f بر $[a,b]$ موجود است، پس

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty}(b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} = \int_a^b f(x)dx\,.$$

و به این دلیل است که رابطه تقریبی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

یا

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

را می‌نویسیم. در رابطه اخیر عبارت

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

در حقیقت همان مقدار متوسط یا میانگین مقادیر $f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_n)$ است.

نکته: قضیهٔ ۶ این امکان را به ما می‌دهد که برای تابعی مانند f بر بازهٔ $[a,b]$، به شرط آن که در مفروضات قضیه صدق کند، بدون محاسبهٔ انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ برای انتگرال، کران بالا و کران پایینی پیدا کنیم.

مثال ۸ : مقدار انتگرال‌های زیر را تخمین بزنید.

$$(i)\ I = \int_1^3 \sqrt{3+x^3}\,dx \qquad\qquad (ii)\ I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)\,dx \quad (iii)$$

حل. (i) چون تابع $f(x)=\sqrt{3+x^3}$ بر بازهٔ $[1,3]$ صعودی اکید است می‌نیمم مطلق و ماکزیمم مطلق f بر این بازه به ترتیب عبارتنداز

$$m=f(1)=\sqrt{3+1}=2 \qquad , \ M=f(3)=\sqrt{30}\,.$$

همچنین $b-a=3-1=2$. بنابراین با استفاده از (10) داریم

$$2\times 2\le\int_1^3\sqrt{3+x^3}\,dx\le\sqrt{30}\times 2$$

،یعنی،

$$4\le\int_1^3\sqrt{3+x^3}\,dx\le 2\sqrt{30}\approx 10.95\,.$$

(ii) تابع زیر علامت انتگرال $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ بر بازهٔ $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$ نزولی اکید است، زیرا مشتق آن

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{(x-tg\,x)\cos x}{x^2}<0.$$

بنابراین می‌نیمم مطلق تابع عبارت است از $m=f(\frac{\pi}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ و ماکزیمم مطلق آن عبارت است از $M=f(\frac{\pi}{4})=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

بنابراین با استفاده از (10) داریم،

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}\,dx\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$

،یعنی،

$$0.22\approx\frac{\sqrt{3}}{8}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}\,dx\le\frac{\sqrt{2}}{6}\approx 0.24.$$

(iii) داریم $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ و این تابع بر $[\frac{1}{2},4]$ مشتق‌پذیر است. حال نقاط بحرانی تابع f بر بازهٔ $[\frac{1}{2},4]$ را بدست می‌آوریم :

$$f'(x)=3x^2-12x+9, \qquad f'(x)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ یا } x=3$$

پس نقاط بحرانی تابع بر $[\frac{1}{2},4]$ منحصر هستند به 3,1. ملاحظه می‌کنیم که

$$f(1)=5, f(3)=1, f(4)=5, f(\frac{1}{2})=\frac{33}{8}\,.$$

پس تابع f بر $[\frac{1}{2},4]$ دارای می‌نیمم مطلق $m=f(3)=1$ و ماکزیمم مطلق $M=f(1)=f(4)=5$ می باشد. بنابراین با استفاده از (10) داریم،

$$1\times(4-\frac{1}{2})\le\int_{\frac{1}{2}}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)\,dx\le 5(4-\frac{1}{2})$$

یا

$$3.5\le\int_{\frac{1}{2}}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)\,dx\le 17.5\,.$$

اکنون به بیان و اثبات قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال‌ها می‌پردازیم.

قضیهٔ ۷ (قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال‌ها) : اگر تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند $c\in[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c). \qquad (12)$$

اثبات. برای صراحت فرض می‌کنیم که $a<b$ (در حالت $a=b$ حکم بدیهی است). چون تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است پس بنابر قضیهٔ مقدار نهائی f بر $[a,b]$ به ترتیب دارای می‌نیمم مطلق m و ماکزیمم مطلق M است و لذا، بنابر قضیهٔ ۶،

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\,.$$

حال طرفین نامساوی‌های بالا را بر عدد مثبت $b-a$ تقسیم کرده و بدست می‌آوریم

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M\,.$$

اگر قرار دهیم $\lambda=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$، آنگاه نامساوی‌های بالا نشان می‌دهند که $m\le\lambda\le M$. فرض کنیم $x_m,x_M\in[a,b]$ چنان باشند که $m=f(x_m)$ و $M=f(x_M)$. می‌توان فرض نمود که $x_m\ne x_M$ (در غیر این‌صورت f تابعی ثابت بوده و مجدداً حکم بدیهی است.) مثلاً $x_m<x_M$. حال بازهٔ بستهٔ $[x_m,x_M]$ زیر بازه‌ای از $[a,b]$ است و لذا تابع f بر $[x_m,x_M]$ نیز پیوسته می‌باشد. اکنون بنابر قضیهٔ مقدار میانی چون $f(x_m)=m\le\lambda\le M=f(x_M)$، نقطه‌ای مانند $c\in[x_m,x_M]$ وجود دارد به طوری که $f(c)=\lambda$، یعنی، $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$.
از اینجا نتیجه می‌شود که نقطه‌ای مانند $c\in[a,b]$ وجود دارد به طوری که $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$ و قضیه ثابت شده است.

تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال‌ها : برای توصیف هندسی قضیهٔ ۷، فرض می‌کنیم که به ازای هر $x\in[a,b]$، $f(x)\ge 0$. در این صورت $\int_a^b f(x)\,dx$ از نظر عددی برابر با مساحت ناحیه‌ای است که با منحنی $y=f(x)$، محور xها و خطوط $x=a, x=b$ محدود شده است. قضیهٔ ۷ بیان می‌کند که نقطه‌ای مانند c در $[a,b]$

وجود دارد به طوری مساحت مستطیل $AEFB$ با بلندی $f(c)$ و پهنای $(b-a)$ مساوی با مساحت ناحیهٔ $ADCB$ است.

شکل ۶ . ۱۸

تبصره : مقدار c در قضیهٔ فوق لزوماً منحصر به فرد نیست. این قضیه روشی را جهت یافتن c ارائه نمی‌کند، بلکه فقط به بیان وجود مقداری مانند c می‌پردازد، و همین مطلب در اثبات قضایای دیگر بکار می‌رود. البته در حالت‌های خاصی می‌توانیم مقدار c را پیدا کنیم، همچنانکه در مثال زیر توضیح داده شده است.

مثال ۹ : پیدا کنید مقدار c را که در رابطهٔ

$$\int_0^3 f(x)dx = (3-0)f(c)$$

صدق می‌کند، هرگاه بدانیم که

$$.f(x) = x^3$$

حل. با روشی مشابه مثال ۱ بدست می‌آوریم، $\int_0^3 x^3\,dx = \frac{81}{4}$. اکنون داریم

$$\int_0^3 x^3 dx = (3-0)c^3 \Leftrightarrow \frac{81}{4} = 3c^3 \Leftrightarrow c^3 = \frac{27}{4}$$

که از آن نتیجه می‌گیریم $c = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

تعریـــف : تـابع f را **زوج** مـی‌نـامیم در صـورتی کـه بـه ازای هـر x از حـوزهٔ تعریـف آن $f(x) = f(-x)$ و f را **فــرد** مـی‌نـامیم در صـورتی کـه بـه ازای هـر x از حـوزهٔ تعریـف آن $.f(x) = -f(-x)$

بنابراین اگر f زوج باشد، نمودار آن نسبت به محور Y ها متقارن است، در حالی که اگـر f فـرد باشد، نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن می‌باشد. ملاحظه کنید که تابعی $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$

زوج، $g(x)=\dfrac{1}{x}$ تابعی فرد و $h(x)=x+x^2$ تابعی است که نه فرد و نه زوج است. بالاخره توجه کنید که اگر f تابعی فرد یا زوج باشد، آنگاه حوزه تعریف f بایستی نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد، یعنی،

(حوزه تعریف f : $Domf=Df$) $x \in Domf$ اگر و فقط اگر $-x \in Domf$.

تبصره : (1) اگر f تابعی فرد باشد، آنگاه $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

(2)اگر f تابعی زوج باشد، آنگاه $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

اثبات. (1)فرض کنیم f تابعی فرد باشد، لذا به ازای هر $x \in Domf$، $f(-x)=-f(x)$. داریم

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

در انتگرال $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ قرار می‌دهیم $x=-t$ و بدست می‌آوریم

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=\int_{a}^{0} f(-t)\,d(-t)=-\int_{a}^{0} f(-t)\,dt=\int_{0}^{a} f(-t)\,dt$$
$$=\int_{0}^{a} (-f(t))\,dt=-\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

و به دلیل آن که مقدار یک انتگرال معین به متغیر آن بستگی ندارد، $\int_{0}^{a} f(t)\,dt=\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ و لذا $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_{0}^{a} f(x)\,dx$. نتیجه می‌گیریم که $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

(2) فرض کنیم f تابعی زوج باشد، لذا به ازای هر $x \in Domf$، $f(-x)=f(x)$. داریم

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=-\int_{0}^{-a} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

اکنون در انتگرال $\int_{0}^{-a} f(x)\,dx$ قرار می‌دهیم $x=-t$ و بدست می‌آوریم $\int_{0}^{-a} f(x)\,dx=\int_{0}^{a} f(-t)\,d(-t)$ یا $\int_{0}^{-a} f(x)\,dx=-\int_{0}^{a} f(-t)\,dt$. امّا $f(-t)=f(t)$ و لذا $\int_{0}^{-a} f(x)\,dx=-\int_{0}^{a} f(t)\,dt$ و چون مقدار انتگرال معین به متغیر آن بستگی ندارد،

$$\int_{0}^{-a} f(x)\,dx=-\int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

مثال ۱۰ : (i)مطلوبست محاسبۀ انتگرال معین $\int_{-1}^{1} |x|\,dx$.

(ii) مطلوبست محاسبۀ انتگرال معین $\int_{-7}^{7} \dfrac{x^4 \sin x}{x^6+2}\,dx$.

حل. (i) چون $f(x)=|x|$ یک تابع زوج است، داریم

$$\int_{-1}^{1}|x|dx = 2\int_{0}^{1}|x|dx = 2\int_{0}^{1}xdx = 2\times(\frac{1}{2}) = 1.$$

(ii)چون $f(x)=\dfrac{x^4\sin x}{x^6+2}$ تابعی فرد است، بدون محاسبه نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{-7}^{7}\frac{x^4\sin x}{x^6+2}dx = 0.$$

۶ . ۴ قضیه‌های بنیادی (اساسی)

محاسبهٔ انتگرال معین به روشی که از روی تعریف، و به عنوان حد یک حاصلجمع، انجام شد روشی طولانی و خسته‌کننده است و مثال‌هایی که آورده شد نوعاً انتگرال معین توابعی بسیار ساده و معمولی بود. در قرن هفدهم میلادی دو دانشمند بزرگ ریاضی، نیوتن و لایبنیتز، تقریباً به طور همزمان ولی مستقل از یکدیگر، نشان دادند که چگونه می‌توان برای محاسبه انتگرال معین از حساب دیفرانسیل استفاده نمود، به عبارت دیگر رابطهٔ بین مشتق و انتگرال را یافتند هدف ما در این بخش بحث و بررسی این مهّم است.

در انتگرال معین

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx$$

فرض کنیم حد پایین a ثابت بوده و حد بالای b تغییر کند. در این صورت مقدار انتگرال معین نیز تغییر خواهد کرد : یعنی، انتگرال **تابعی از حد بالای** b خواهد شد.

لذا به جهت حفظ نمادهای معمول، حد بالا را با x نشان داده، و برای پرهیز از اشتباه متغیر انتگرال‌گیری را با t نشان خواهیم داد (این تغییر در متغیر انتگرال‌گیری در مقدار انتگرال معین تاثیری ندارد). در این صورت انتگرال $\int_{a}^{x}f(t)\,dt$ را بدست می‌آوریم. برای مقدار ثابت a، این انتگرال تابعی از حد بالای x خواهد بود. ما این تابع را با $\phi(x)$ نشان می‌دهیم :

$$\phi(x)=\int_{a}^{x}f(t)\,dt. \qquad (1)$$

اگر $f(t)$ تابعی پیوسته و نامنفی باشد، کمیّت $\phi(x)$ از نظر عددی مساوی با مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخط $aAXx$ است. بدیهی است که این مساحت با x تغییر می‌کند.

به شکل زیر توجه نمایید. حال مشتق $\phi(x)$ را نسبت به x، یعنی، مشتق انتگرال معین (1) را نسبت به حد بالای آن پیدا می‌کنیم.

شکل ۶ . ۱۹

قضیهٔ ۸ (قضیهٔ بنیادی اوّل حساب دیفرانسیل و انتگرال) : فرض کنیم f تابعی پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ بوده و x نقطهٔ دلخواهی در $[a,b]$ باشد. در این صورت اگر $\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$، آنگاه $\phi'(x)=f(x)$. به عبارت دیگر، مشتق یک انتگرال معین نسبت به حد بالایش برابر است با تابع زیر علامت انتگرال وقتی بجای متغیر انتگرال‌گیری حد بالا را قرار دهیم.

اثبات. به متغیر x نمو (مثبت یا منفی) Δx را می‌دهیم؛ در این صورت بنابر قضیهٔ ۴، بدست می‌آوریم،

$$\phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

نمو تابع ϕ برابر است با

$$\Delta\phi=\phi(x+\Delta x)-\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt$$

،یعنی،

$$.\Delta\phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \qquad (2)$$

اکنون قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرال‌ها را برای انتگرال طرف راست تساوی (2) بکار می‌بریم :

$$\Delta\phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=(x+\Delta x-x)f(c)=f(c)\Delta x$$

که در آن c نقطه‌ای بین x و $x+\Delta x$ است. سپس خارج قسمت نمو تابع به نمو متغیر را پیدا می‌کنیم :

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta x}=\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}=\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=f(c).$$

بنابراین

$$\phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c).$$

امّا چون $c\to x$ وقتی که $\Delta x\to 0$، داریم

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=\lim_{c\to x} f(c)$$

و با توجه به پیوستگی تابع f، $\lim\limits_{c\to x} f(c)=f(x)$. بنابراین $\phi'(x)=f(x)$، و قضیهٔ ثابت شده است.

تعبیر هندسی قضیهٔ فوق آسان است، نمو $\Delta\phi=f(c)\Delta x$ برابر است با مساحت ذوزنقه منحنی‌الخطی که قاعدهٔ آن Δx است، و مشتق $\phi'(x)=f(x)$ مساوی با طول قطعهٔ xX می‌باشد. (به شکل
۶ . ۱۹ مراجعه نمایید.)

تبصرهٔ مهم : یکی از نتایج قضیهٔ بالا این است که :

هر تابع پیوسته دارای یک تابع اولیه است.

در حقیقت، اگر $f(t)$ تابعی پیوسته بر بازهٔ $[a,x]$ باشد، آنگاه بنابر قضیه وجودی انتگرال معین (قضیهٔ۱) انتگرال معین $\int_a^x f(t)\,dt$ موجود است، به عبارت دیگر، تابع زیر موجود است :

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

امّا همانطور که ثابت شد، $\phi'(x)=f(x)$ و بنابراین $\phi(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ است.

قضیهٔ ۹ (قضیهٔ بنیادی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال) :

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده و $F(x)$ یک تابع اولیّه $f(x)$ بر $[a,b]$ باشد. در این صورت فرمول زیر را داریم :

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \qquad (3)$$

توجه : این فرمول به **فرمول نیوتن – لایبنیتز** معروف است.

اثبات. فرض کنیم $F(x)$ یک تابع اولیهٔ $f(x)$ باشد، یعنی، به ازای هر $a\le x\le b$، $F'(x)=f(x)$. بنابر قضیهٔ ۸، تابع $\phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ نیز یک تابع اولیه $f(x)$ است، یعنی $\phi'(x)=f(x)$. لذا $\phi'(x)-F'(x)=0$، یعنی، $(\phi-F)'(x)=0$، پس $\phi-F$ بر $[a,b]$ تابعی ثابت است، یعنی، عدد ثابتی مانند C وجود دارد به طوری‌که به ازای هر $x\in[a,b]$، $(\phi-F)(x)=C$ یا $\phi(x)=F(x)+C$ و بنابراین

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)+C.$$

اکنون اگر $x=a$ قرار دهیم بدست می‌آوریم، $\int_a^a f(t)\,dt=0$ و لذا $0=F(a)+C$.

پس $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a)$ و اگر $x=b$ قرار دهیم خواهیم داشت.

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$$

یا، با تعویض متغیر انتگرال‌گیری به x،

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

اگر نماد $F(b)-F(a)=F(x)\,|_a^b$ را در نظر بگیریم، آنگاه فرمول (2) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,|_a^b = F(b)-F(a)$$

و قضیه ثابت شده است.

مثال ۱۱ : به سادگی دیده می‌شود که

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\,|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}\ ,$$
$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}\,|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}\ ,$$
$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,|_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\quad (n\neq 1)\ .$$

تبصره : (1) فرض کنیم در انتگرال معین $G(x)=\int_x^b f(t)\,dt$ بخواهیم مشتق G را نسبت به حد پایین محاسبه کنیم. داریم $G(x)=-\int_b^x f(t)\,dt$ و لذا بنابر قضیهٔ ۸ ؛

$$G'(x)=-f(x).$$

(2) اگر $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ آنگاه $F'(x)=g'(x)f(g(x))$، به دلیل آن که $\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ تابعی از $g(x)$ است که $g(x)$ خود تابعی از x می باشد. بنابراین $\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ تابعی مرکب از x خواهد شد. اکنون با استفاده از قضیهٔ مشتق تابع مرکب

$$F'(x)=\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)'_{g(x)} \times (g(x))'_x = f(g(x))\times g'(x)$$

که در حقیقت برای گرفتن مشتق از انتگرال از قضیهٔ ۸ استفاده کرده‌ایم.

مثال ۱۲ : مشتق توابع زیر را نسبت به x پیدا کنید :

(a) $F(x)=\int_{x^2}^{x^3} \ln t\,dt \quad (x>0)$،

(b) $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt \quad (x>0)$.

حل. (a) انتگرال داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$F(x)=\int_{x^2}^{c}\ln t\,dt+\int_{c}^{x^3}\ln t\,dt=\int_{c}^{x^3}\ln t\,dt-\int_{c}^{x^2}\ln t\,dt$$

که در آن $c>0$ مقدار ثابت دلخواهی است. اکنون با استفاده از قضیهٔ ۸ مشتق تابع $F(x)$ را پیدا می‌کنیم :

$$F'(x)=\left[\int_{c}^{x^3}\ln t\,dt\right]'_{x^3}(x^3)'_x-\left[\int_{c}^{x^2}\ln t\,dt\right]'_{x^2}(x^2)'_x$$

$$=\ln(x^3)\times 3x^2-\ln(x^2)\times 2x=(9x^2-4x)\ln x\,.$$

(b)

$$F'(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{c}\cos(t^2)\,dt+\int_{c}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\,dt$$

$$=-\int_{c}^{\frac{1}{x}}\cos(t^2)\,dt+\int_{c}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)dt,$$

$$F'(x)=-\left[\int_{c}^{\frac{1}{x}}\cos(t^2)\,dt\right]'_{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'_x+\left[\int_{c}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\,dt\right]'_{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'_x=$$

$$=-\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\cos x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x\,.$$

مثال ۱۳ : نقاط اکسترمم نسبی تابع $F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ را در حوزهٔ تعریف $x>0$ پیدا کنید.

حل. مشتق تابع F را نسبت به x پیدا می‌کنیم ؛

$$F'(x)=\left[\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt\right]'_x=\frac{\sin x}{x}.$$

نقاط بحرانی تابع عبارتنداز :

$x=n\pi\,(n=1,2,...)$ ، که در آن $\sin x=0$.

حال مشتق دوّم تابع در این نقاط را پیدا می‌کنیم :

$$F''(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},$$

$$F''(n\pi)=\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)=\frac{1}{n\pi}(-1)^n\neq 0.$$

چون مشتق دوم در نقاط $x=n\pi$ $(n=1,2,...)$ غیر صفر است، این نقاط، نقاطِ اکسترمم نسبی تابع هستند، یعنی : ماکزیمم نسبی هر گاه n فرد باشد و می‌نیمم نسبی هر گاه n زوج باشد.

توجه کنید که در این مثال از قضیهٔ (آزمون مشتق دوّم برای اکسترمم نسبی) در فصل چهارم استفاده کرده‌ایم.

مثال ۱۴ : حد زیر را پیدا کنید :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx}{x^3}$$

حل. در $x=0$ انتگرال $\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx$ مساوی با صفر است ؛ به سادگی دیده می‌شود که شرایط قاعدهٔ هوپیتال برقرار است. بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\int_0^{x^2}\sin\sqrt{x}\,dx\right]'_{x^2}(x^2)'_x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

مثال ۱۵ : پیدا کنید $\frac{dy}{dx}$ را برای توابع ضمنی زیر :

(a) $\int_0^{y}e^{-t^2}\,dt+\int_0^{x^2}\sin^2 t\,dt=0$ ؛

(b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{3-2\sin^2 z}\,dz+\int_0^{y}\cos t\,dt=0$.

حل. (a) از طرف چپ معادله نسبت به x مشتق گرفته و در نظر داریم که $y=y(x)$ تابعی از x است :

$$\left[\int_0^{y}e^{-t^2}\,dt\right]'_y.\frac{dy}{dx}+\left[\int_0^{x^2}\sin^2 t\,dt\right]'_{x^2}(x^2)_x{}'=0,$$

$$e^{-y^2}\frac{dy}{dx}+\sin^2(x^2)\times(2x)=0.$$

بنابراین، با حل معادله برای $\frac{dy}{dx}$، بدست می‌آوریم :

$$\frac{dy}{dx}=-2xe^{+y^2}\sin^2(x^2).$$

(b) از طرف چپ معادله نسبت به x مشتق گرفته و در نظر داریم که $y=y(x)$ تابعی از x است :

$$\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{3-2\sin^2 z}\,dz\right]'_x+\left[\int_0^{y}\cos t\,dt\right]'_y\frac{dy}{dx}=0$$

که از آنجا

$\sqrt{3-2\sin^2 x}+\cos y\dfrac{dy}{dx}=0$ و لذا $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{3-2\sin^2 x}}{\cos y}$.

۶. ۵ محاسبهٔ حد حاصلجمع به کمک انتگرال معین

گاهی اوقات لازم می‌شود حد حاصلجمعی را محاسبه کنیم که در آن تعداد جمعوندها به طور نامحدود افزایش می‌یابند. در بعضی حالت‌ها یک چنین حدهایی را می‌توان به کمک انتگرال معین محاسبه نمود هر گاه امکان تبدیل حاصلجمع داده شده به یک حاصلجمع انتگرال وجود داشته باشد.

به عنوان مثال، نقاط $\frac{1}{n}$، $\frac{2}{n}$، …، $\frac{n}{n}$ را به عنوان نقاط تقسیم بازه $[0,1]$ به n قسمت مساوی با طول $\Delta x=\frac{1}{n}$ در نظر گرفته، برای هر تابع پیوستهٔ $f(x)$، داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+...+f(\frac{n}{n})]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx\ .$$

به مثال زیر توجه نمایید.

مثال ۱۸ : مطلوبست محاسبهٔ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+....+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi] \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}) \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+...+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}] \qquad (3)$$

$$.A=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \qquad (4)$$

حل. (1) اعداد داخل کروشه نشاندهندهٔ مقادیر تابع $f(x)=\sin x$ در نقاط

$$x_1=\frac{\pi}{n}\ ,\ x_2=\frac{2\pi}{n}\ ,\ ...\ ,\ x_{n-1}=\frac{(n-1)}{n}\pi$$

می‌باشند که بازهٔ $[0,\pi]$ را به n زیر بازه با طول $\Delta x=\frac{\pi}{n}$ تقسیم کرده‌اند. بنابراین، اگر جمعوند $\sin\frac{n\pi}{n}=0$ را به حاصلجمع اضافه کنیم، نتیجهٔ کار حاصلجمع انتگرال تابع $f(x)=\sin x$ بر بازهٔ $[0,\pi]$ می شود.

بنابر تعریف، حد چنین حاصلجمع انتگرالی وقتی $n \to \infty$ انتگرال معین تابع $f(x)=\sin x$ از 0 تا π خواهد بود :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+....+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}]$$
$$=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\,|_0^{\pi}=2\ .$$

(2) حاصلجمع داخل پرانتز را به شکل زیر تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$$
$$=\frac{1}{n}(\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}})\ .$$

حاصلجمع بدست آمده در حقیقت حاصلجمع انتگرال تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ بر بازهٔ $[0,1]$ است که به n زیر بازهٔ با طول مساوی $\Delta x=\frac{1}{n}$ تقسیم شده است.

حد این حاصلجمع وقتی $n\to\infty$ مساوی انتگرال معین این تابع از 0 تا 1 است :

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})$$
$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=arc\sin\frac{x}{2}\,|_0^1=\frac{\pi}{6}\ .$$

(3) عبارت داده شده را به شکل زیر تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{3}{n}[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+...+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}]$$
$$=\frac{3}{n}[\sqrt{\frac{1}{1+0}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}}+...+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}}].$$

حاصلجمع بدست آمده حاصلجمع انتگرال تابع $f(x)=\sqrt{\frac{1}{1+x}}$ بر بازهٔ $[0,3]$ است؛ بنابراین، با استفاده از تعریف،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+...+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}]$$
$$=\int_0^3\sqrt{\frac{1}{1+x}}dx=\int_0^3(1+x)^{-\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{1+x}\,|_0^3=4-2=2\ .$$

(4) با گرفتن لگاریتم از طرفین تساوی داریم،

$$\ln A = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1\times 2\times \ldots \times n}{n^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} [\ln \frac{1}{n} + \ln \frac{2}{n} + \ldots + \ln \frac{n}{n}] .$$

عبارت داخل کروشه حاصلجمع انتگرال تابع $f(x)=\ln x$ بر بازهٔ $[0,1]$، یعنی،

$$\int_0^1 \ln x\, dx = (x\ln x - x)|_0^1 = -1$$

است. در نتیجه، $\ln A = -1$ و بنابراین $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$.

۶ . ۶ تغییر متغیر در انتگرال معین

قضیهٔ ۱۰: انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

را، که در آن تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است، در نظر می‌گیریم.

به معرفی متغیر جدید t با استفاده از فرمول

$$x=\varphi(t)$$

می‌پردازیم. اگر

(1) $\varphi(\alpha)=a$,$\varphi(\beta)=b$،

(2) $\varphi(t),\varphi'(t)$ بر $[\alpha,\beta]$ پیوسته باشند،

(3) $f[\varphi(t)]$ بر $[\alpha,\beta]$ تعریف شده و پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

توجه: رابطه (1) به **فرمول تغییر متغیر در انتگرال معین** معروف است.

اثبات: اگر $F(x)$ یک تابع اولیه تابع $f(x)$ باشد، آنگاه می‌توانیم معادلات زیر را بنویسیم:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \qquad (2)$$
$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)]+C. \qquad (3)$$

درستی آخرین معادله را می‌توان با مشتق‌گیری از هر دو طرف نسبت به t بررسی نمود. (این مطلب با استفاده از رابطه (2) در ۵ . ۲ هم نتیجه می‌شود). از (2) داریم

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

از (3) داریم

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt = F\left[\varphi(t)\right]\Big|_\alpha^\beta = F\left[\varphi(\beta)\right]-F\left[\varphi(\alpha)\right]$$
$$= F(b)-F(a).$$

طرف‌های راست این دو عبارت با هم مساوی هستند، و بنابراین طرف‌های چپ آن‌ها نیز با هم مساوی خواهند شد، لذا قضیه ثابت شده است.

تبصره: (1) بایستی توجه نمود که وقتی انتگرال معین را از فرمول (1) محاسبه می‌کنیم ما دیگر به متغیر اولیه بر نمی‌گردیم. اگر انتگرال معین طرف راست فرمول (1) را محاسبه نمائیم عدد مشخصی را بدست می‌آوریم، که انتگرال معین طرف چپ (1) هم مساوی با همین عدد است.

(2) بجای تغییر متغیر $x=\varphi(t)$ اغلب تغییر متغیر وارون $t=\psi(x)$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت حدود انتگرال‌گیری β,α مستقیماً با استفاده از معادلات $\beta=\psi(b)\,,\alpha=\psi(a)$ بدست می‌آیند. در عمل، تغییر متغیر معمولاً به کمک توابع همواره مشتق‌پذیر یکنوا اجرا می‌شود. تغییر حدود انتگرال‌گیری به طور مناسب در شکل جدولی زیر ارائه می‌گردد:

x	t
a	α
b	β

مثال ۱۹: (i)مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

(ii) مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$.

(iii)مطلوبست محاسبه انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

حل. (i)تغییر متغیر $x=R\sin t$ داده و بدست می آوریم $dx=R\cos t dt$.

حدود جدید را تعیین می‌کنیم:

x	t

0	0
R	$\frac{\pi}{2}$

شکل ۶ . ۲۰

در نتیجه،

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\;R\cos t dt=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt$$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\;\,dt=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$

$$=R^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi R^2}{4}.$$

از نقطه نظر هندسی، انتگرال محاسبه شده $\frac{1}{4}$ مساحت دایره $x^2+y^2=R^2$ می‌باشد.

(ii) تغییر متغیر $x=2\sec t$ داده و بدست می‌آوریم:

$$x=2\sec t;$$

$$dx=2\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt;$$

x	t
2	0
4	$\frac{\pi}{3}$

بنابراین،

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{4sec^2t-4}}{16sec^4t}.2\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\;\cos t\;\,dt=\frac{1}{12}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{32}.$$

(iii)تغییر متغیر $t=tg\frac{x}{2}$ داده و بدست می‌آوریم:

$$x=2\,arctgt;$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}dt;$$

x	t

0	0
$\frac{\pi}{2}$	1

بنابراین

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arc\,tg \frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(arc\,tg \frac{1}{\sqrt{3}} - arc\,tg\,0\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

مثال ۲۰: (i) مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

(ii)مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

حل. (i) انتگرال را به حاصلجمع دو انتگرال تبدیل می‌کنیم:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = I_1 + I_2.$$

برای انتگرال

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

تغییر متغیر زیر را بکار می‌بریم:

$$x = \pi - t;$$
$$dx = -dt;$$

x	t
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
π	0

در این صورت

$$I_2 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} dt.$$

بنابراین

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\, dt}{1+\cos^2 t} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t\, dt}{1+\cos^2 t}.$$

چون انتگرال‌های اول و سوم تنها در نماد متغیر انتگرال‌گیری اختلاف دارند، بدست می‌آوریم

$$I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\, dt}{1+\cos^2 t}.$$

برای این انتگرال تغییر متغیر زیر را بکار می‌بریم:

$$u = \cos t,$$
$$du = -\sin t\, dt$$

t	u
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0

بنابراین

$$I = -\pi \int_1^0 \frac{du}{1+u^2} = \pi \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

نکته: انتگرال نامعین $\int \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ را نمی‌توان حل کرد. با وجود این انتگرال معین مفروض، همانطور که در بالا دیدیم، به کمک تغییر متغیر قابل حل است.

(ii) تغییر متغیر زیر را می‌دهیم:

$$x = tgt,$$
$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t},$$

x	t
0	0
1	$\frac{\pi}{4}$

بنابراین

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1+tg\, t)\, sec^2 t}{sec^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tg\, t)\, dt.$$

تبدیل زیر را انجام می‌دهیم:

$$1+tg\,t=tg\frac{\pi}{4}+tg\,t=\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}.$$

با جایگذاری در انتگرال بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\ln 2dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt\\&=\frac{1}{2}t\ln 2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt\\&=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt=\frac{\pi}{8}\ln 2+I_1-I_2.\end{aligned}$$

اکنون نشان می‌دهیم که $I_1=I_2$. برای این منظور تغییر متغیر

$$t=\frac{\pi}{4}-z,\qquad dt=-dz,$$

t	z
0	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$	0

را در انتگرال $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt$ می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{aligned}I_2&=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right)dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-z\right)\right]dz\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+z\right)dz=I_1.\end{aligned}$$

بنابراین $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

توجه کنید که در این مسأله هم مانند مسأله قبل، انتگرال نامعین $\int\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ قابل حل نمی باشد.

۶ . ۷ انتگرال‌گیری جزء به جزء . روش‌های تقلیل

فرض کنیم u و υ توابعی مشتق‌پذیر از x باشند. در این صورت

$$(\upsilon u)' = u'\upsilon + u\upsilon'$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف اتحاد بالا از a تا b بدست می‌آوریم

$$\int_a^b (u\upsilon)' \, dx = \int_a^b u'\upsilon \, dx + \int_a^b u\upsilon' \, dx . \qquad (1)$$

چون $\int (u\upsilon)' \, dx = u\upsilon + C$ ، داریم $\int_a^b (u\upsilon)' \, dx = u\upsilon\big|_a^b$ ،به این دلیل معادله را می‌توانیم به شکل

$$u\upsilon\big|_a^b = \int_a^b \upsilon du + \int_a^b u d\upsilon$$

یا بالاخره،

$$\int_a^b u d\upsilon = u\upsilon\big|_a^b - \int_a^b \upsilon du$$

بنویسیم.

مثال ۲۱: (i)مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin bx \, dx$.

(ii)مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x} \, dx$.

حل. (i) قرار می‌دهیم

$$\left| \begin{array}{l} u = \sin bx \ , \\ d\upsilon = e^{ax} \, dx \, , \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} du = b\cos bx \, dx \, , \\ \upsilon = \dfrac{1}{a} e^{ax} . \end{array} \right.$$

چون توابع $u = \sin bx$ و $\upsilon = \frac{1}{a} e^{ax}$ به همراه مشتقاتشان در بازه $[0,\pi]$ پیوسته هستند. فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء را می‌توان بکار برد:

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx \Big|_0^{\frac{\pi}{b}} - \frac{a}{b}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$= -\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{-b}{a} I_1 .$$

اکنون انتگرال I_1 را به روش جزء به جزء حل می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$\left|\begin{array}{l} u=\cos bx, \\ d\upsilon=e^{ax}\,dx, \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} du=-b\sin bx\,dx, \\ \upsilon=\dfrac{1}{a}e^{ax}. \end{array}\right.$$

در این صورت

$$I=\frac{-b}{a}\left(\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx\Big|_0^{\frac{\pi}{b}}+\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{b}}e^{ax}\sin bx\,dx\right)$$

$$=-\frac{b}{a}\left(-\frac{e^{\frac{a\pi}{b}}}{a}-\frac{1}{a}\right)-\frac{b^2}{a^2}I=\frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}I.$$

بنابراین

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}I=\frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)}{a^2}, \qquad I=\frac{b\left(e^{\frac{a\pi}{b}}+1\right)}{a^2+b^2}.$$

به ویژه، در $a=b=1$ بدست می‌آوریم

$$\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right).$$

(ii) ابتدا تغییر متغیر می‌دهیم:

$$\begin{array}{l} \sqrt{x}=t, \\ x=t^2, \\ dx=2t\,dt \end{array}$$

x	t
0	0
$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

که از آنجا

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\sin\sqrt{x}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt.$$

انتگرال آخر را به روش جزء به جزء حل می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$\left|\begin{array}{l} t=u \\ \sin t\,dt=d\upsilon \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} dt=du \\ -\cos t=\upsilon. \end{array}\right.$$

در این صورت

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt=2\left[-t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt\right]=2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2.$$

مثال ۲۲: (i)مطلوبست محاسبه انتگرال $I_n=\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx$ که در آن n عددی طبیعی است.

(ii)با استفاده از نتیجه (i) فرمول زیر را بدست آورید:

$$1-\frac{\binom{n}{1}}{3}+\frac{\binom{n}{2}}{5}-\frac{\binom{n}{3}}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

که در آن $\binom{n}{k}$ ضرایب دو جمله‌ای نیوتن هستند.

توجه: بنابر قرارداد:

$$\begin{cases}(2n)!!=2.4.6\ldots(2n)\\(2n+1)!!=1.3.5\ldots(2n+1)\end{cases}$$

حل. (i)انتگرال را می‌توان بوسیله بسط تابع زیر علامت انتگرال $(a^2-x^2)^n$ بر طبق فرمول دو جمله‌ای نیوتن محاسبه نمود، اما این کار محاسبات طولانی و خسته کننده‌ای را در بر دارد. لذا ساده‌تر است فرمولی بدست آوریم که انتگرال I_n را به انتگرال I_{n-1} تقلیل (کاهش) می‌دهد. برای این کار انتگرال I_n را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I_n=\int_0^a (a^2-x^2)^{n-1}(a^2-x^2)dx=a^2\,I_{n-1}-\int_0^a x(a^2-x^2)^{n-1}\,x\,dx$$

و آخرین انتگرال را به روش جزء به جزء حل می‌کنیم:

$$\left|\begin{array}{l}u=x,\\ d\upsilon=(a^2-x^2)^{n-1}\,x\,dx\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l}du=dx\\ \upsilon=-\frac{1}{2n}(a^2-x^2)^n.\end{array}\right. \qquad (n\neq 0)$$

بدست می‌آوریم

$$I_n=a^2\,I_{n-1}+\frac{1}{2n}x(a^2-x^2)^n\Big|_0^a-\frac{1}{2n}\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx=a^2\,I_{n-1}-\frac{1}{2n}I_n.$$

که از آنجا

$$I_n=a^2\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}.$$

این فرمول برای هر عدد حقیقی n بجز $-\frac{1}{2},0$ برقرار است.

به ویژه برای عدد طبیعی n با در نظر گرفتن

$$I_0=\int_0^a dx=a,$$

بدست می‌آوریم

$$I_n = a^{2n+1}\frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 6.4.2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\ldots 7.5.3} = a^{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

(ii) انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_n = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

تابع زیر علامت انتگرال را بوسیله فرمول دو جمله‌ای نیوتن بسط داده و از حاصل بین 1,0 انتگرال می‌گیریم. داریم:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx \\
&= \int_0^1 \left[1-\binom{n}{1}x^2+\binom{n}{2}x^4-\binom{n}{3}x^6+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{2n}\right]dx \\
&= \left[x-\binom{n}{1}\frac{x^3}{3}+\binom{n}{2}\frac{x^5}{5}-\binom{n}{3}\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \\
&= 1-\frac{1}{3}\binom{n}{1}+\frac{1}{5}\binom{n}{2}-\frac{1}{7}\binom{n}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1},
\end{aligned}$$

و اثبات کامل است.

مثال ۲۳: مطلوبست محاسبه $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ که در آن n عددی صحیح و نامنفی است.

حل. داریم

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\, dx.$$

با استفاده از روش جزء به جزء قرار می‌دهیم

$$\left|\begin{aligned} &u = \sin^{n-1} x, \\ &d\upsilon = \sin x\, dx, \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} &du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx, \\ &\upsilon = -\cos x. \end{aligned}\right.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
I_n &= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos x \cos x\, dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx.
\end{aligned}$$

با نماد انتخاب شده می‌توانیم آخرین معادله را به صورت

$$I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

بنویسیم که از آن بدست می‌آوریم

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}. \qquad (2)$$

با ادامه همین روش، بدست می‌آوریم.

$$I_{n-2}=\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}$$

و بنابراین

$$I_n=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}.$$

تکرار روند بالا، بالاخره به I_0 یا I_1 می‌رسد بسته به این که n زوج یا فرد باشد.

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: n زوج است، $n=2m$ بنابراین

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}.\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}.\frac{1}{2}I_0.$$

حالت دوم: n فرد است، $n=2m+1$. بنابراین

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}.\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}.\frac{2}{3}I_1.$$

اما به دلیل آن که

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}, \qquad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$$

بدست می‌آوریم

$$I_{2m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m} x\,dx=\frac{2m-1}{2m}.\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{5}{6}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1} x\,dx=\frac{2m}{2m+1}.\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{6}{7}.\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.$$

۶ . ۸ انتگرال‌های توسعی

در این بخش به معرفی انتگرال‌های توسعی (ناسِرِه) می‌پردازیم و به نوعی مفهوم انتگرال معین را تعمیم می‌دهیم. چون در کار با انتگرال توسعی عملاً با مفاهیم بینهایت کوچک‌ها و بینهایت بزرگ‌ها سروکار داریم ابتدا به صورت مختصر این مفاهیم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تابع $\alpha(x)$ را وقتی $x \to a$ یا $x \to \infty$ یک **بینهایت کوچک** می‌نامیم در صورتی که $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ یا $\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

تابع $f(x)$ را وقتی $x \to a$ یا $x \to \infty$ یک **بینهایت بزرگ** می‌نامیم در صورتی که $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ یا $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

کمیت وارون یک بینهایت بزرگ یک بینهایت کوچک است.

توابع بینهایت کوچک دارای خواص زیر هستند :

(1) حاصلجمع و حاصلضرب هر تعداد معین از بینهایت کوچک‌ها وقتی $x \to a$ (یا $x \to \infty$) نیز بینهایت کوچک هستند وقتی $x \to a$ (یا $x \to \infty$).

(2) حاصلضرب یک تابع بینهایت کوچک در یک تابع کراندار تابعی بینهایت کوچک است.

اکنون به مقایسه بینهایت کوچک‌ها می‌پردازیم. فرض کنیم توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ وقتی $x \to a$ دو بینهایت کوچک باشند. اگر

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$$

که در آن c عدد معینی مخالف با صفر است، آنگاه $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ بینهایت کوچک‌های از **مرتبه یکسان** نامیده می‌شوند. اگر $c = 1$، آنگاه توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ **معادل (یا هم‌ارز)** نامیده شده و آن را با علامت $\alpha(x) \sim \beta(x)$ نمایش می‌دهیم.

اگر $c = 0$، آنگاه تابع $\alpha(x)$ یک بینهایت کوچک از **مرتبه بالاتر** نسبت به $\beta(x)$ نامیده شده و این مطلب را با نماد $\alpha(x) = O(\beta(x))$ نشان می‌دهیم. در این وضعیت $\beta(x)$ یک بینهایت کوچک از **مرتبهٔ پائین‌تر** نسبت به $\alpha(x)$ نامیده می‌شود.

اگر $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = c$ که در آن $0 < |c| < +\infty$، آنگاه تابع $\alpha(x)$ یک بینهایت کوچک از **مرتبه nام** در مقایسه با $\beta(x)$ نامیده می‌شود.

آنچه را که تا کنون دربارهٔ توابع بینهایت کوچک بیان شد وقتی $x \to a$، برقرار است برای توابع بینهایت کوچک وقتی $x \to +\infty$، $x \to -\infty$، $x \to a^+$، $x \to a^-$.

مفهوم توابع بینهایت بزرگ از مراتب مختلف به طریق مشابه معرفی می‌گردد.

مثال ۲۴. (1) نشان دهید که توابع

(a) $f(x) = \frac{2x-4}{x^2+5}$ وقتی $x \to 2$،

(b) $f(x)=(x-1)^2\sin^3\dfrac{1}{x-1}$ وقتی $x\to 1$، بینهایت کوچک هستند.

(2) بینهایت کوچک‌های زیر را (وقتی $x\to 0$) با بینهایت کوچک $\varphi(x)=x$ مقایسه نمائید :

(a) $f_1(x)=tg\,x^3$؛ (b) $f_2(x)=\sqrt[3]{\sin^2 x}$

(c) $f_3(x)=\sqrt{9+x}-3$.

(3) مرتبه بینهایت کوچکی $\beta(x)$ را با $\alpha(x)=x$ مقایسه نمائید در صورتی که

(a) $\beta(x)=\cos x-\cos 2x$؛ (b) $\beta(x)=1-\cos x$.

(4) نشان دهید که بینهایت کوچک‌های $\alpha(x)=x$، $\beta(x)=x\cos(\dfrac{1}{x})$ وقتی $x\to 0$ قابل مقایسه نیستند، یعنی، خارج قسمت آن‌ها دارای حد نمی‌باشد.

حل. (1) (a) کافی است حدرا پیدا کنیم :

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2+5}=0.$$

(b) اولاً تابع $\varphi(x)=(x-1)^2$ وقتی $x\to 1$ یک بینهایت کوچک است، ثانیاً تابع

$$\psi(x)=\sin^3\frac{1}{x-1}\ ;\ x\neq 1$$

کراندار است زیرا $|\sin^3\dfrac{1}{x-1}|\leq 1$. بنابراین تابع مفروض $f(x)$ نمایش حاصلضرب تابع کراندار $\psi(x)$ در بینهایت کوچک $\varphi(x)$ می‌باشد و به این دلیل است که $f(x)$ وقتی $x\to 1$ یک بینهایت کوچک است.

(2) (a) داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x^3}{x}=\lim_{x\to 0}[\frac{tg\,x^3}{x^3}\cdot x^2]=\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x^3}{x^3}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

بنابراین $tg\,x^3$ یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ بالاتر نسبت به x است.

(b) داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]=\infty.$$

بنابراین $\sqrt[3]{\sin^2 x}$ یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ پائین‌تر نسبت به x است.

(c) داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+x}+3}=\frac{1}{6}.$$

بنابراین بینهایت کوچک‌های $\sqrt{9+x}-3$ و x دارای یک مرتبهٔ یکسان هستند.

(3) (a) داریم $\beta(x)=\cos x-\cos 2x=2\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{x}{2}$ که از آنجا

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\left(\alpha(x)\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(\frac{3x}{2})\sin(\frac{x}{2})}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

بنابراین $\beta(x)$ یک بینهایت کوچک از مرتبه دو نسبت به x است.

(b) داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\left(\alpha(x)\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

بنابراین $\beta(x)$ یک بینهایت کوچک از مرتبه دو نسبت به x است.

(4) در حقیقت، $\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(\frac{1}{x})}{x}=\lim_{x\to 0}\cos(\frac{1}{x})$ موجود نیست، و معنای آن این است که این بینهایت کوچک‌ها قابل مقایسه نیستند.

فرض کنیم $\alpha(x)$، $\beta(x)$، $\alpha_1(x)$، $\beta_1(x)$ وقتی $x\to x_0$ همگی توابعی بینهایت کوچک باشند. اگر $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ و $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ و $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ موجود باشد آنگاه $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ نیز موجود بوده و داریم $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. در حقیقت، داریم

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}$$
$$=1.\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.1=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

احکام زیر را به آسانی می‌توان ثابت نمود:

(i)اگر $0<|k|<\infty$ و $\lim_{x\to a}f(x)=k$ آنگاه $f(x)\alpha(x)\sim k\alpha(x)$.

(ii) اگر $\alpha(x)\sim\gamma(x)$ و $\beta(x)\sim\gamma(x)$ آنگاه $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(iii) شرط لازم و کافی برای آن که دو بینهایت کوچک معادل باشند آنستکه تفاضل آن‌ها بینهایت کوچکی با مرتبهٔ بالاتر نسبت به هر کدام از دو بینهایت کوچک باشد.

در زیر چند بینهایت کوچک معادل مشاهده می‌شود : ($\alpha(x)$ وقتی $x \to 0$ یک بینهایت کوچک است)

(1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$؛ (2) $tg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$؛

(3) $1-\cos\alpha(x) \sim \frac{[\alpha(x)]^2}{2}$؛ (4) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$؛

(5) $arc\,tg\,\alpha(x) \sim \alpha(x)$؛ (6) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$؛

(7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a \quad (a>0)$ به ویژه $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$؛

(8) $[1+\alpha(x)]^p - 1 \sim p\alpha(x)$، به ویژه، $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$

در بیشتر حالات این معادل بودن بینهایت کوچک‌ها محاسبه حدها را ساده می‌کند.

مثال ۲۵: نشان دهید که وقتی $x \to 0$

(a) $1-\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim \frac{1}{2}x$، (b) $1-\frac{1}{1+x} \sim x$،

(c) $\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$.

حل. (a) بنابر فرمول (8) به ازای $p=\frac{1}{2}$ داریم

$$1-\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}(\sqrt{1+x}-1) \sim 1\cdot\frac{1}{2}x.$$

(b) مانند قسمت بالا حل می‌شود.

(c) بنابر فرمول (1) داریم

$$\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x\sqrt{x}} = x^{3/4}.$$

$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}} = x^{\frac{3}{4}}\sqrt{1+x^{\frac{1}{2}}} \sim x^{\frac{3}{4}}$$

که از آنجا $\sin\sqrt{x\sqrt{x}} \sim \sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$.

مثال ۲۶: با استفاده از هشت فرمول کمیت‌های معادل در بالا حدود زیر را پیدا کنید :

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$، (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$،

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$، (iv) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\arcsin^2 x - arc\,tgx^2}{3x}$،

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\,\ln(1+3x)}{(arc\,tg\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}$.

حل. (i) داریم $\sin 5x \sim 5x \quad ; \ln(1+4x) \sim 4x$. بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}.$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\frac{x^2}{4}} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$$

$$= -4\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = -2.$$

(iii) با استفاده از بینهایت کوچک‌های معادل داده شده بدست می‌آوریم :

$$\sqrt{1+x+x^2}-1 \sim \frac{(x+x^2)}{2} \sim \frac{x}{2}\ ,\ \sin 4x \sim 4x.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x} = \lim\frac{\frac{x}{2}}{4x} = \frac{1}{8}.$$

(iv) داریم

$$\sin 2x + arc\sin^2 x - arc\,tg^2 x \sim \sin 2x \sim 2x$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - arc\,tg^2 x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

(v) داریم

$$\ln(1+3x) \sim 3x\ ;\sin\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}؛$$

$$e^{5\sqrt[3]{x}}-1 \sim 5\sqrt[3]{x}\ ؛arc\,tg\sqrt{x} \sim \sqrt{x}؛$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\,\ln(1+3x)}{(arc\,tg\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\cdot 3x}{x\cdot 5\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{5}.$$

برای توابع بینهایت بزرگ قواعد مقایسه‌ای مشابهی وجود دارد.

اکنون به موضوع اصلی این بخش یعنی انتگرال‌های توسعی باز می‌گردیم. در اینجا توسعی را به دو مفهوم بررسی می‌کنیم، یکی وسعت یافتن طول بازهٔ انتگرال‌گیری از متناهی به نامتناهی و دیگری وسعت یافتن مفهوم پیوستگی تابع روی یک بازهٔ بسته به حالتی که در آن تابع در تعدادی متناهی از نقاط بازه ناپیوسته باشد.

I . انتگرال‌های با حدود نامتناهی

فرض کنیم تابع $f(x)$ به ازای تمامی مقادیر x که $a \le x < +\infty$ تعریف شده و پیوسته باشد. انتگرال

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

را در نظر می‌گیریم. این انتگرال برای هر $b > a$ با معنی است. مقدار انتگرال به مقدار b بستگی داشته و تابعی پیوسته از b است (به قضیهٔ ۸ مراجعه نمائید). حال به بررسی رفتار این انتگرال وقتی $b \to +\infty$ می‌پردازیم.

تعریف. اگر حد $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ مقداری متناهی باشد، آنگاه این حد **انتگرال توسعی** تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[a,+\infty)$ نامیده شده و با نماد $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ نشان داده می‌شود. لذا، بنابر تعریف،

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx \,.$$

شکل ۶ . ۲۱

در این حالت گفته می‌شود که انتگرال توسعی $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ وجود دارد یا **همگرا است**. اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ وقتی $b \to +\infty$ دارای حدی متناهی نباشد، آنگاه می‌گوئیم که $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ وجود ندارد یا **واگرا است**. به طریق مشابه می‌توان انتگرال‌های توسعی بازه‌های نامتناهی دیگر را تعریف نمود :

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^a f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \,.$$

آخرین معادله به صورت زیر تعبیر می‌گردد :
اگر هر یک از انتگرال‌های توسعی طرف راست موجود باشد، آنگاه، بنابر تعریف، انتگرال طرف چپ نیز موجود است.

مثال ۲۷: با استفاده از تعریف،انتگرال‌های توسعی زیر را محاسبه نمائید یا نشان دهید که واگرا هستند.

$$(a)\ \int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x};\quad (b)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5};\quad (c)\ \int_0^{\infty} x\sin x\,dx;\quad (d)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}.$$

حل. (a) بنابر تعریف

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{A\to+\infty}\int_{e^2}^{A}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_{e^2}^{A}\right)$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\ln^2 A}\right)=\frac{1}{8}.$$

(b) بنابر تعریف

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{B\to-\infty}\int_B^0\frac{dx}{x^2+2x+5}+\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{x^2+2x+5}$$

(بجای نقطهٔ $x=0$ هر نقطهٔ دیگری را روی محور Xها به عنوان نقطهٔ میانی انتگرال‌گیری می‌توان در نظر گرفت). هر کدام از حدود طرف راست تساوی بالا را محاسبه می‌نمائیم :

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^0\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2}arc\,tg\frac{x+1}{2}\Big|_B^0=\frac{1}{2}arc\,tg\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$
$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}arc\,tg\frac{x+1}{2}\Big|_0^A=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}arc\,tg\frac{1}{2}.$$

بنابراین $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\frac{\pi}{2}$.

(c) بنابر تعریف

$$\int_0^{\infty}x\sin x\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\sin x\,dx\,.$$

با قرار دادن $u=x$, $dv=\sin x\,dx$ و انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء بدست می‌آوریم

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x\sin x\,dx=\lim_{A\to+\infty}\left(-x\cos x\Big|_0^A+\int_0^A\cos x\,dx\right)$$
$$=\lim_{A\to+\infty}(-A\cos A+\sin A).$$

امّا حد آخروجود ندارد. در نتیجه انتگرال $\int_0^\infty x\sin x\,dx$ واگرا است.

(d) چون (وقتی $\alpha \neq 1$)

داریم

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} |_1^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1)$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1).$$

لذا در مورد این انتگرال نتیجه می‌گیریم که

اگر $\alpha > 1$، آنگاه $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ و انتگرال همگرا است؛

اگر $\alpha < 1$، آنگاه $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$ و انتگرال واگرا است.

وقتی که $\alpha = 1$، $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x |_1^{+\infty} = \infty$ و انتگرال واگرا است.

در بسیاری از حالات کافی است تعیین کنیم که آیا انتگرال داده شده همگراست یا واگرا و مقدار آن را تخمین بزنیم. ملاک‌های زیر، که بدون اثبات ارائه می‌شوند، در این رابطه مهم و مفید هستند.

ملاک مقایسه. فرض کنیم توابع $f(x)$ و $g(x)$ به ازای هر $x \geq a$ تعریف شده و بر هر بازهٔ $[a, A]$، $A \geq a$ انتگرال پذیر باشند. اگر به ازای هر $x \geq a$، $0 \leq f(x) \leq g(x)$ آنگاه از همگرائی انتگرال $\int_a^\infty g(x)\,dx$ نتیجه می‌گیریم که انتگرال $\int_a^\infty f(x)\,dx$ نیز همگراست و $\int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$ ؛ از واگرائی انتگرال $\int_a^\infty f(x)\,dx$ نتیجه می‌گیریم که انتگرال $\int_a^\infty g(x)\,dx$ نیز واگراست.

ملاک مقایسهٔ خاص. اگر وقتی $x \to \infty$ تابع $f(x) \geq 0$ یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ $\lambda > 0$ نسبت به $\frac{1}{x}$ باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ به ازای $\lambda > 1$ همگرا و به ازای $\lambda \leq 1$ واگراست.

همگرائی مطلق و مشروط. فرض کنیم تابع $f(x)$ به ازای هر $x \geq a$ تعریف شده باشد. اگر انتگرال $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ همگرا باشد آنگاه انتگرال $\int_a^\infty f(x)\,dx$ نیز همگرا است و آن را **همگرای مطلق** می‌نامیم. در این حالت

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| \le \int_a^\infty |f(x)|\,dx\,.$$

اگر انتگرال $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرا بوده ولی $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ واگرا باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^\infty f(x)\,dx$ **همگرای مشروط** نامیده می‌شود.

مثال ۲۸: همگرایی انتگرال‌های زیر را بررسی کنید :

$(i)\ \int_0^\infty \frac{dx}{1+2x^2+3x^4}$، $(ii)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x+\sin^2 x}$، $(iii)\ \int_1^\infty \frac{(x+\sqrt{x+1})dx}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}$،

$(iv)\ \int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$، $(v)\ \int_2^\infty \frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}}$، $(vi)\ \int_1^\infty (1-\cos\frac{x}{2})dx$ ،

$(vii)\ \int_1^\infty \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$.

حل. (i) تابع $f(x)=\frac{1}{1+2x^2+3x^4}$ مثبت و بینهایت کوچکی از مرتبهٔ $\lambda=4$ نسبت به $\frac{1}{x}$ است وقتی $x\to\infty$. چون $4>1$، بر طبق ملاک مقایسهٔ خاص، انتگرال همگراست.

(ii) تابع $f(x)=\frac{1}{x+\sin^2 x}$ به ازای $x\ge 1$ پیوسته و مثبت است. وقتی $x\to\infty$ تابع $f(x)$ یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ $\lambda=1$ نسبت به $\frac{1}{x}$ است؛ لذا بنابر طبق ملاک مقایسهٔ خاص انتگرال واگرا است.

(iii) تابع زیر علامت انتگرال به ازای $x\ge 1$ پیوسته و مثبت است.مرتبه بینهایت کوچکی λ از آن را نسبت به $\frac{1}{x}$ وقتی $x\to\infty$ تعیین می‌کنیم؛ چون

$$\frac{x+\sqrt{x+1}}{x^2+2\sqrt[5]{x^4+1}}=\frac{1}{x}\times\frac{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+2\sqrt[5]{\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^{10}}}},$$

مرتبهٔ بینهایت کوچکی $\lambda=1$ است. بنابر ملاک مقایسهٔ خاص انتگرال واگراست.

(iv) چون تابع

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\times\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})}}$$

یک بینهایت کوچک از مرتبهٔ $\lambda = \frac{3}{2}$ نسبت به $\frac{1}{x}$ است وقتی $x \to +\infty$، لذا بنابر طبق ملاک مقایسهٔ خاص انتگرال همگراست.

(v) تابع زیر علامت انتگرال به ازای $x \geq 2$ پیوسته و مثبت است. مرتبهٔ بینهایت کوچکی آن را نسبت به $\frac{1}{x}$ وقتی $x \to +\infty$ تعیین می‌کنیم :

$$\frac{\sqrt[7]{3+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3-1}} = \frac{1}{x^{\frac{11}{35}}} \times \frac{\sqrt[7]{2+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{x^3}}}.$$

چون عامل دوّم وقتی $x \to +\infty$ دارای حد $\sqrt[7]{2}$ است، داریم $\lambda = \frac{11}{35} < 1$. در نتیجه انتگرال داده شده واگراست.

(vi) تابع $f(x) = 1 - \cos\frac{2}{x} = 2\sin^2\frac{1}{x}$ برای $x \geq 1$ مثبت و پیوسته است. چون $2\sin^2\frac{1}{x} \sim 2(\frac{1}{x})^2 = \frac{2}{x^2}$، انتگرال مفروض (بنابر ملاک مقایسه خاص) همگراست.

(vii) تابع $f(x) = \frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}$ با تغییر علامت صورت علامتش تغییر می‌کند. همگرائی انتگرال

$$\int_1^\infty \frac{|1-4\sin 2x|}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$$

را بررسی می‌کنیم. چون $\frac{|1-4\sin 2x|}{x^3+\sqrt[3]{x}} < \frac{5}{x^3}$ و انتگرال $\int_1^\infty \frac{5dx}{x^3}$ همگراست، انتگرال $\int_1^\infty \frac{|1-4\sin 2x|}{x^3+\sqrt[3]{x}}dx$ نیز (بنابر ملاک مقایسه) همگراست. بنابراین انتگرال مفروض همگرای مطلق است.

مثال ۲۹: ثابت کنید که انتگرال دیریکلهٔ $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ همگرای مشروط است.

حل. انتگرال مفروض را به صورت حاصلجمع دو انتگرال نشان می‌دهیم :

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

اولین انتگرال یک انتگرال معین است (به دلیل آن که $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$). با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء برای انتگرال دوّم داریم

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{A\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{A}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{\cos x}{x}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{A}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{A}\frac{\cos x}{x^2}dx\right]$$
$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx\,.$$

امّا انتگرال توسعی $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ همگرای مطلق است، به دلیل آن که $\frac{|\cos x|}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$ و انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ همگراست.

بنابراین $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ همگراست. اکنون ثابت می‌کنیم که انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ واگراست. در حقیقت،

$$\frac{|\sin x|}{x}\geq\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x},$$

امّا انتگرال

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}dx=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{A}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\ln A-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$$

واگراست، زیرا $\lim_{A\to\infty}\ln A=\infty$ و انتگـرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ (بـه دلیلـی مشـابه آنچـه بـرای انتگـرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ ثابت نمودیم) همگراست.

II. انتگرال‌های توابع بدون کران

اگر تابع $f(x)$ در $a\leq x<b$ تعریف شده، برروی هر بازه $[a,b-\varepsilon]$، کـه در آن $0<\varepsilon<b-a$، انتگرال‌پذیر بوده و در نقطهٔ انتهائی راست b بدون کران (حالت خـاص : ناپیوسـته، تعریـف نشـده) باشد، آنگاه، بنابر تعریف، قرار می‌دهیم

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx\,.$$

اگر این حـد موجـود و متنـاهی باشـد، آنگـاه گفتـه مـی‌شـود کـه انتگـرال توسـعی $\int_a^b f(x)\,dx$ **همگراست**. در غیر این صورت آن را **واگرا** می‌نامند.

به طور مشابه، اگر تابع $f(x)$ در نقطهٔ انتهائی چپ a بدون کران باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\,dx\,.$$

بالاخره، اگر تابع در همسایگی یک نقطهٔ درونی c از بازهٔ $[a,b]$ بدون کران باشد، آنگاه، بنابر تعریف،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

شرط همگرائی انتگرال طرف چپ در معادلهٔ بالا این است که هر کدام از انتگرال‌های طرف راست همگرا باشند.

فرض کنیم تابع $f(x)$ بر تمامی بازهٔ $[a,b]$ به استثنای یک تعداد متناهی از نقاط پیوسته باشد. اگر تابعی مانند $F(x)$ موجود باشد که برای نقاط بازهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده و تساوی $F'(x)=f(x)$ بر $[a,b]$ به استثنای یک تعداد متناهی از نقاط برقرار باشد، آنگاه فرمول نیوتن – لایبنیتز

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

را داریم. گاهی اوقات $F(x)$ یک **تابع اولیهٔ تعمیم یافتهٔ** برای تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ نامیده می‌شود. برای توابع تعریف شده و نامنفی بر بازهٔ $a \le x < b$ ملاک‌های همگرائی (ملاک‌های مقایسه) مشابه ملاک های مقایسه برای انتگرال‌های توسعی با حدود نامتناهی برقرار است.

ملاک مقایسه. فرض کنیم توابع $g(x)$ و $f(x)$ بر بازهٔ $a \le x < b$ تعریف شده و روی هر بازهٔ $[a,b-\varepsilon]$، که در آن $0<\varepsilon<b-a$؛ انتگرال پذیر باشند. اگر $0 \le f(x) \le g(x)$، آنگاه از همگرائی انتگرال $\int_a^b g(x)\,dx$ همگرائی انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ نتیجه می‌شود و داریم $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ ؛ از واگرائی انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ واگرائی انتگرال $\int_a^b g(x)\,dx$ نتیجه می‌شود.

ملاک همگرائی خاص. اگر تابع $f(x) \ge 0$ بر بازهٔ $a \le x < b$ پیوسته بوده و یک بینهایت بزرگ از مرتبه λ نسبت به $\frac{1}{b-x}$ باشد وقتی $x \to b^-$، آنگاه انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ به ازای $\lambda<1$ همگرا و به ازای $\lambda \ge 1$ واگراست. به ویژه، انتگرال

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-a)^\lambda}$$

به ازای $\lambda<1$ همگرا و به ازای $\lambda \ge 1$ واگراست.

همگرائی مطلق و مشروط. فرض کنیم تابع $f(x)$ بر بازهٔ $a \le x < b$ تعریف شده و بر هر بازهٔ $[a,b-\varepsilon]$ انتگرال پذیر باشد؛ در این صورت از همگرائی انتگرال $\int_a^b |f(x)|\,dx$ همگرائی

انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ نتیجه می‌شود. در اینحالت انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ **همگرای مطلق** نامیده می‌شود.

امّا اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرا بوده و انتگرال $\int_a^b |f(x)|\,dx$ واگرا باشد، آنگاه انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ **همگرای مشروط** نامیده می‌شود.

ملاک‌های مشابهی نیز برقرار است برای انتگرال‌های توسعی $\int_a^b f(x)\,dx$ که در آن $f(x)$ در نقطهٔ انتهائی چپ بدون کران است.

مثال ۳۰: با استفاده از تعریف، انتگرال‌های توسعی زیر را محاسبه نمائید (یا واگرایی آن‌ها را ثابت کنید) :

$$(a)\ \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} \qquad (b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} \qquad (c)\ \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

$$(d)\ \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} \qquad (e)\ \int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}dx \qquad (f)\ \int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}.$$

حل. (a) تابع $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ در همسایگی نقطهٔ $x=1$ بدون کران است. این تابع در هر بازهٔ $[1+\varepsilon,e]$ انتگرال پذیر است، زیرا تابعی پیوسته است. بنابراین

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}[\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\,|_{1+\varepsilon}^e]$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}] = \frac{3}{2}.$$

(b) تابع $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ در همسایگی نقطهٔ $x=\dfrac{\pi}{2}$ بدون کران است و بر هر بازهٔ $[0,\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon]$ انتگرال پذیر است زیرا تابعی پیوسته است. بنابراین

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\ln tg\,(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\,|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\ln tg(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}) = \infty\,.$$

بنابراین انتگرال داده شده واگراست.

(c) تابع زیر علامت انتگرال در همسایگی نقاط $x=3, x=1$ بدون کران است لذا، بنابر تعریف،

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

(بجای نقطهٔ $x=2$ می‌توانیم هر نقطهٔ درونی بازهٔ $[1,3]$ را انتخاب کنیم). اکنون هر یک از جمعوندها را جداگانه محاسبه می‌کنیم :

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} arc\sin(x-2)\,|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[0-arc\sin(\varepsilon-1)] = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_2^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} arc\sin(x-2)\,|_2^{3-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[arc\sin(1-\varepsilon)-0] = \frac{\pi}{2}.$$

بنابراین

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

(d) تابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ در همسایگی نقطهٔ $x=1$، که یک نقطهٔ درونی بازهٔ انتگرال‌گیری است، بدون کران است. لذا، بنابر تعریف،

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}.$$

هر جمعوند را جداگانه محاسبه می‌کنیم. اگر $0\le x<1$، آنگاه

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} arc\sin x\,|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[arc\sin(1-\varepsilon)-0] = \frac{\pi}{2}.$$

اگر $1<x\le 2$، آنگاه

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln(x+\sqrt{x^2-1})\,|_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln(2+\sqrt{3})-\ln(1+\varepsilon+\sqrt{(1+\varepsilon)^2-1})] = \ln(2+\sqrt{3}).$$

بنابراین

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}).$$

(e) با تقسیم هر جمله صورت بر $\sqrt[5]{x^3}$ انتگرال را به صورت حاصلجمع سه‌انتگرال نمایش می‌دهیم،

$$\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}dx = \int_0^1 x^{\frac{12}{5}}dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{4}{15}}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{5}}}.$$

اولین جمعوند یک انتگرال معین است و لذا $\int_0^1 x^{\frac{12}{5}}dx = \frac{5}{17}x^{\frac{17}{5}}\,|_0^1 = \frac{5}{17}$.

دومین و سومین جمعوند در نقطه $x=0$ بدون کران هستند. بنابراین،

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{4}{15}}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^{\frac{4}{15}}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{15}{11}x^{\frac{11}{15}}\,|_1^2 = \frac{15}{11};$$

به طریق مشابه $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{5}}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{5}}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}}\,|_\varepsilon^1 = \frac{5}{2}$.

بنابراین.

$$\int_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[5]{x^3}}\;dx = \frac{5}{17}+\frac{15}{11}-2\cdot\frac{5}{2} = -\frac{625}{187}.$$

(f) تابع $f(x)=\frac{1}{1-x^3}$ را به صورت حاصلجمع کسرهای جزئی می‌نویسیم :

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{1+x+x^2}\right].$$

در این صورت

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x+2}{1+x+x^2}dx.$$

چون $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln(1-x)\,|_0^{1-\varepsilon} = \infty$، انتگرال داده شده واگرا است. نیازی نیست که جمعوند دوم را که انتگرال معینی است محاسبه نمائیم.

مثال ۳۱: انتگرال‌های توسعی زیر را محاسبه نمائید :

(a) $\int_{-3}^3 \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$؛ $\qquad (b)$ $\int_0^2\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

حل. (a) ابتدا انتگرال نامعین را پیدا می‌کنیم

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{2}(9\,arc\sin\frac{x}{3}-x\sqrt{9-x^2})+c.$$

تابع $F(x)=\frac{1}{2}(9\arcsin\frac{x}{3}-x\sqrt{9-x^2})$ یک تابع اولیهٔ تعمیم یافته برای $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ بر بازهٔ $[-3,3]$ است، زیرا $F(x)$ بر این بازه پیوسته است و در هر نقطه از بازهٔ $(-3,3)$ داریم $F'(x)=f(x)$. بنابراین، با استفاده از فرمول نیوتن – لایبنیتز، بدست می‌آوریم

$$\int_{-3}^3\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{2}(9\arcsin\frac{x}{3}-x\sqrt{9-x^2})\,|_{-3}^3=\frac{9}{2}\pi.$$

(b) می‌توان نوشت

$$f(x)=\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

انتگرال نامعین برابر است با

$$\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx = 2\arcsin\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}+C.$$

تابع $F(x)=2\arcsin\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$ یک تابع اولیه تعمیم یافته برای $f(x)$ بر بازهٔ $[0,2]$ است، زیرا $F(x)$ بر این بازه پیوسته است و بر بازهٔ $[0,2)$ داریم $F'(x)=f(x)$.

بنابراین، با استفاده از فرمول نیوتن – لایبنیتز، بدست می‌آوریم

$$\int_0^2\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx = (2\arcsin\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2})\Big|_0^2=\pi+2.$$

مثال ۳۲: همگرائی انتگرال‌های توسعی زیر را بررسی نمائید :

$(a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ $\quad(b)\ \int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$ $\quad(c)\ \int_0^1\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1-x^3}}dx$

$(d)\ \int_0^2\frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1}dx$ $\quad(e)\ \int_1^2\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}dx$ $\quad(f)\ \int_0^1\frac{\cos x dx}{\sqrt[4]{x}-\sin x}dx$

$(g)\ \int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$.

حــل. (a) در نقطهٔ $x=0$ تـابع زیـر علامـت انتگـرال بینهایـت مـی‌شـود. هـر دو انتگـرال $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}},\int_0^1\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$ واگرا هستند، زیرا $\lambda=\frac{4}{3}>1$. در نتیجه انتگرال داده شده واگرا است. اگر بـه این مطلب توجه نداشته و فرمول نیوتن – لایبنیتز را برای این انتگرال بکار می‌بردیم نتیجه غلط

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}=(-\frac{3}{\sqrt[3]{x}})\Big|_{-1}^{1}=-6$$

را بدست می‌آوردیم. توجه کنید که تابع $F(x)=\frac{-3}{\sqrt[3]{x}}$ در $x=0$ پیوسته نیست و بـه عـلاوه تـابع زیر علامت انتگرال مثبت است.

(b) تابع زیر علامت انتگرال وقتی $x\to 0^+$ یک بینهایت بزرگ است. چون

$$\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\sim\frac{\sqrt{2}}{2}x \qquad (x\to 0^+).$$

تابع زیر علامت انتگرال دارای مرتبهٔ $\lambda=1$ نسبت بـه $\frac{1}{x}$ اسـت. لـذا بنـابر مـلاک مقایسـهٔ خـاص انتگرال داده شده واگراست.

(c) تابع زیر علامت انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[5]{1+x+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}}$$

این تابع وقتی $x\to 1$ یک بینهایت بزرگ است . مرتبه آن نسبت به $\frac{1}{1-x}$ مساوی با $\lambda=\frac{1}{5}$ است، زیرا اولین عامل وقتی $x\to 0$ به سمت 1 میل می‌کند. لذا، بنابر ملاک مقایسهٔ خاص، انتگرال داده شده همگراست.

(d) تابع $f(x)=\frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1}$ در بازهٔ $(0,2)$ مثبت است و در $x=0$ تعریف نشده است. نشان می‌دهیم که $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\infty$. در حقیقت، چون

$$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x\,,\ln(1+\sqrt[5]{x^3})\sim\sqrt[5]{x^3}\quad(x\to 0),$$

داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt[5]{x^3})}{e^{\sin x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}=\infty.$$

در عین حال نشان داده‌ایم که وقتی $x\to 0$، $f(x)\sim\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$، یعنی، $f(x)$ یک بینهایت بزرگ از مرتبهٔ $\lambda=\frac{2}{5}<1$ نسبت به $\frac{1}{x}$ است. در نتیجه، بنابر ملاک مقایسهٔ خاص، تابع مفروض همگراست.

(e)مرتبه بینهایت بزرگی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}$ را در همسایگی نقطه $x=2$ نسبت به $\frac{1}{2-x}$ تعیین می‌کنیم. برای این منظور $f(x)$ را به صورت زیر می نویسیم :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16-x^4}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{4+x^2}\ \sqrt[3]{2+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}.$$

بنابراین واضح است که وقتی $x\to 2$ تابع $f(x)$ یک بینهایت بزرگ از مرتبه $\lambda=\frac{1}{3}<1$ نسبت به $\frac{1}{2-x}$ است. بنابر ملاک مقایسهٔ خاص انتگرال داده شده همگراست.

(f)تابع $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}$ در همسایگی نقطهٔ $x=0$ بدون کران است. چون

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}-\sin x}=\frac{\cos x}{\sqrt[4]{x}(1-\frac{\sin x}{\sqrt[4]{x}})}\sim\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\qquad(x\to 0^+)$$

وقتی $x \to 0^+$ تابع $f(x)$ یک بینهایت بزرگ از مرتبه $\lambda = \frac{1}{4} < 1$ نسبت به $\frac{1}{x}$ است، بنابر ملاک مقایسهٔ خاص، انتگرال همگراست.

(g) برای $0 < x \le 1$

$$0 \le \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

امّا انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ همگراست، لذا بنابر ملاک مقایسه، انتگرال $\int_0^1 \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| dx$ نیز همگرا بوده و در نتیجه انتگرال داده شده همگرای مطلق است.

۶ . ۹ انتگرال‌های وابسته به یک پارامتر

فرض کنیم انتگرال معین

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

را داشته باشیم که در آن تابع زیر علامت انتگرال بستگی به پارامتری مانند α دارد. اگر پارامتر α تغییر کند آنگاه مقدار انتگرال معین نیز تغییر خواهد کرد. بنابراین انتگرال معین تابعی از α است، لذا می‌توانیم آن را با $I(\alpha)$ نمایش دهیم.

I. فرض کنیم که $f'_\alpha(x,\alpha), f(x,\alpha)$ توابعی پیوسته باشند هر گاه

$$a \le x \le b \quad , \quad c \le \alpha \le d . \qquad (2)$$

مشتق انتگرال را نسبت به پارامتر α پیدا می‌کنیم :

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = I'_\alpha(\alpha).$$

در روند یافتن مشتق توجه می‌کنیم که

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{1}{\Delta\alpha}\left[\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right]$$
$$= \int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx .$$

قضیهٔ مقدار میانگین را برای تابع زیر علامت انتگرال بکار برده و داریم

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}=f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)$$

که در آن $0<\theta<1$. چون $f'_\alpha(x,\alpha)$ در ناحیهٔ بستهٔ (2) پیوسته است. پس

$$f'_\alpha(x,\alpha+\theta\Delta\alpha)=f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon$$

که در آن کمیت ε، که بستگی به x، α و $\Delta\alpha$ دارد، به صفر میل می‌کند وقتی $\Delta\alpha\to 0$.
بنابراین

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=\int_a^b\left[f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon\right]dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx+\int_a^b\varepsilon\,dx\,.$$

حد می‌گیریم وقتی $\Delta\alpha\to 0$ و داریم

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{I(\alpha+\Delta\alpha)-I(\alpha)}{\Delta\alpha}=I'_\alpha(\alpha)=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

یا

$$\left[\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right]'_\alpha=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx\,.$$

این فرمول را **فرمول لیبنیتز** می‌نامند. (در اینجا بدون اثبات می‌پذیریم کـه انتگـرال $I=\int_a^b\varepsilon\,dx$ به صفر میل می‌کند وقتی $\Delta\alpha\to 0$).

II. اکنون فرض کنیم در انتگرال (1) حدود انتگرال گیری b,a توابعی از α باشند :

$$I(\alpha)=\phi\left[\alpha,a(\alpha),b(\alpha)\right]=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}f(x,\alpha)\,dx \qquad (1')$$

$\phi\left[\alpha,a(\alpha),b(\alpha)\right]$ تابعی مرکب از α است، b,a متغیرهای واسطه هسـتند. بـرای پیـدا کـردن مشتق $I(\alpha)$ قانون مشتق تابع مرکب برای توابع چند متغیره را بکار می‌بریم :

$$I'(\alpha)=\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\phi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\phi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha}. \qquad (3)$$

بنابر قضیهٔ مشتق یک انتگرال معین نسبت به حد بالا بدست می‌آوریم :

$$\frac{\partial\phi}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=f\left[b(\alpha),a\right]$$

و

$$\frac{\partial\phi}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=-\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x,\alpha)\,dx=-f\left[a(\alpha),\alpha\right].$$

بالاخره، برای محاسبهٔ $\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}$ فرمول لیبنتیز ارائه شده در بالا را بکار می‌بریم :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx\,.$$

با قرار دادن عبارت بدست آمده برای مشتقات در (3) داریم

$$I'(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+f\left[b(\alpha),\alpha\right]\frac{db}{d\alpha}-f\left[a(\alpha),\alpha\right]\frac{da}{d\alpha}\,. \qquad (4)$$

در اینجا به این مطلب اشاره می‌کنیم که فرمول لیبنتیز برای انتگرال‌هائی که یکی از حدود آن‌ها بینهایت است نیز برقرار است. با استفاده از فرمول لیبنیتز این امکان وجود دارد که بعضی انتگرال‌های معین را (که به روش عادی قابل حل نیستند) محاسبه نمائیم.

مثال ۳۳: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال

$$I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\,.$$

حل. ابتدا توجه می‌کنیم که محاسبهٔ مستقیم انتگرال غیر ممکن است، زیرا تابع اولیهٔ تابع $e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}$ قابل بیان به صورت ترکیبی از توابع مقدماتی نمی‌باشد. برای محاسبهٔ این انتگرال آن را به عنوان تابعی از پارامتر α در نظر می‌گیریم. در این صورت مشتق آن نسبت به α با استفاده از فرمول لیبنیتز بدست می‌آید.

$$I'(\alpha)=\int_0^\infty[e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}]_\alpha{}'\,dx=\int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha\,x\,dx\,.$$

امّا بسادگی دیده می‌شود که آخرین انتگرال مساوی با $\frac{1}{1+\alpha^2}$ است. بنابراین

$$I'(\alpha)=\frac{1}{1+\alpha^2}\,.$$

با انتگرال‌گیری نسبت به α تابع $I(\alpha)$ را بدست می‌آوریم.

$$I(\alpha)=arc\,tg\alpha+C\,.\qquad(5)$$

اکنون بایستی C را پیدا کنیم. برای این کار، توجه می‌کنیم که

$$I(0)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin 0\cdot x}{x}dx=\int_0^\infty 0\,dx=0\,.$$

به علاوه، $arc\,tg0=0$. با قرار دادن $\alpha=0$ در (5) بدست می‌آوریم

$$I(0)=arc\,tg\,0+C$$

که از آنجا $C=0$. بنابراین، به ازای هر مقدار α داریم $I(\alpha)=arc\,tg\,\alpha$، یعنی

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=arc\,tg\,\alpha\,.$$

مثال ۳۴: تابع گاما. انتگرال زیر را که بستگی به پارامتر α داشته در نظر می‌گیریم :

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx\qquad(6)$$

و نشان خواهیم داد که این انتگرال توسعی همگراست (وجود دارد) هر گاه $\alpha>0$. انتگرال را به صورت حاصلجمع

$$\int_0^\alpha x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^\alpha x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

نشان می‌دهیم. اولین انتگرال طرف راست همگراست، زیرا

$$0 < \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx < \int_0^1 x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}.$$

به طریق مشابه انتگرال دوم نیز همگراست. در حقیقت، فرض کنیم n عدد صحیحی باشد به طوری که $n > \alpha - 1$. در این صورت بدیهی است که

$$0 < \int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx < \int_1^\infty x^n e^{-x}dx < \infty.$$

به روش جزءبه‌جزء انتگرال می‌گیریم و توجه می‌کنیم که به ازای هر عدد طبیعی k

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x} = 0. \qquad (7)$$

بنابراین (6) تابع معین از α را تعریف می‌نماید. این تابع با $\Gamma(\alpha)$ نشان داده شده و **تابع گاما** نامیده می‌شود :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx. \qquad (8)$$

تابع گاما در ریاضیات کاربردی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقدار $\Gamma(\alpha)$ را برای مقادیر صحیح α پیدا کنیم.

به ازای $\alpha = 1$ داریم

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1. \qquad (9)$$

فرض کنیم عدد صحیح $\alpha > 1$. به روش جزءبه‌جزء انتگرال می‌گیریم :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx = -x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x}dx.$$

یا، با توجه به (7)،

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1). \qquad (10)$$

با استفاده از (10) و (9) بدست می‌آوریم که برای $\alpha = n$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

مثال ۳۵: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال $\phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\alpha x)dx$.

(راهنمائی : از این مطلب استفاده کنید که **انتگرال پواسن** $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

حل. اگر از تابع $\phi(\alpha)$ نسبت به α مشتق بگیریم بدست می‌آوریم

$$\phi'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2}(-2x\sin(2\alpha x)\,dx.$$

این انتگرال توسعی را به روش جزءبه‌جزء حل می‌کنیم :

$$\left|\begin{array}{l} u=\sin(2\alpha\, x) \\ dv=-2xe^{-x^2}dx \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l} du=2\alpha\cos(2\alpha\, x)\,dx \\ v=e^{-x^2}. \end{array}\right.$$

بنابراین

$$\phi'(\alpha)=e^{-x^2}\sin(2\alpha\, x)\,|_0^\infty -2\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\alpha\, x)\,dx$$

یا $\phi'(\alpha)=0-2\alpha\phi(\alpha)$، یعنی، $\dfrac{\phi'(\alpha)}{\phi(\alpha)}=-2\alpha$.

از معادلهٔ اخیر نسبت به α انتگرال می‌گیریم

$$\int\frac{\phi'(\alpha)}{\phi(\alpha)}d\alpha=-\alpha^2+\ C_1\Rightarrow \ln|\phi(\alpha)|=-\alpha^2+C_1$$

و بنابراین $\phi(\alpha)=Ce^{-\alpha^2}$ که در آن C مقدار ثابت دلخواهی است. برای بدست آوردن C داریم

$$C=\phi(0)=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

بنابراین $\phi(\alpha)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}$.